

4. Systemen, automaten en grammatica's*

Dr. ir. H.G. Stassen
Prof. dr. W.J.M. Levelt

1. Systemen

1.1. Inleiding

Met de bestudering van steeds ingewikkelder vraagstukken, of deze nu afkomstig zijn uit de fysica of techniek; de fysiologie, de biologie of de geneeskunde; de economie of de management; de psychologie of de sociologie, is er een groeiende tendens ontstaan naar specialisatie in elk van de vakgebieden. Dit leidt enerzijds tot een zeer diepgaande kennis in het onderhavige vakgebied, anderzijds brengt het met zich mee een steeds moeilijker wordende communicatie tussen de aldus gevormde specialisten. De noodzaak van deze communicatie is echter met de veelal sterk multidisciplinair gerichte vraagstukken van steeds groter wordend belang. Een algemeen systeemtheoretische aanpak beoogt deze multidisciplinaire benadering mogelijk te maken, immers, bij elk wetenschappelijk onderzoek kan men steeds een drietal belangrijke fasen herkennen.

— Het bestuderen en formuleren van het probleem in de werkelijkheid; dit leidt tot het opstellen van een model.

— Het uitwerken van het model; het nagaan hoe het model zich gedraagt; en het onderzoeken voor welke invloeden en/of factoren het model gevoelig is, zodat het model een voorspellende waarde verkrijgt.

— Het interpreteren en vertalen van de modelresultaten naar de werkelijkheid.

De systeemtheorie kan voor zeer veel vakgebieden worden beschouwd als een universeel gereedschap — een hulpwetenschap — die het mogelijk maakt op systematische wijze problemen te formuleren, en te helpen oplossen. Alvorens in te gaan op wat men mag verwachten als bijdrage van de systeemtheorie in de psychonomie, is het noodzakelijk eerst een aanvaardbare definitie van een systeem te geven. Dit is geenszins eenvoudig daar bij alle in de literatuur gegeven definities wel aan een specifieke discipline

wordt gedacht. Heel algemeen kan gesteld worden dat een systeem een deel van de werkelijkheid is, afgezonderd van zijn omgeving, en daarmee al dan niet relaties onderhoudende. De omgeving kan daarbij het systeem beïnvloeden en vice versa het systeem de omgeving. De keuze van de systeemgrenzen zijn daarbij volledig arbitrair, zij worden bepaald door het door de onderzoeker gestelde doel. De systeemtheorie kan nu de volgende bijdragen, van belang bij de modelvorming, opleveren.

— Methoden om systemen van zeer uiteenlopende aard op overeenkomstige wijze door middel van modellen te beschrijven, en dus het herkennen van analogieën.

— Methoden voor de analyse en identificatie van systemen en voor de bestudering van de wisselwerking tussen systeem en omgeving.

— Classificatie van systemen, van de wisselwerking tussen systeem en omgeving, alsmede de definiëring van de daarbij behorende eigenschappen.

Opgemerkt dient te worden dat de systeemtheorie van groot nut is bij het opstellen van modellen. Uit deze modellen, gebaseerd op ingangs-uitgangsbetrekkingen kan veel inzicht verwacht worden ten aanzien van de structuur en het dynamisch gedrag van het te onderzoeken systeem.

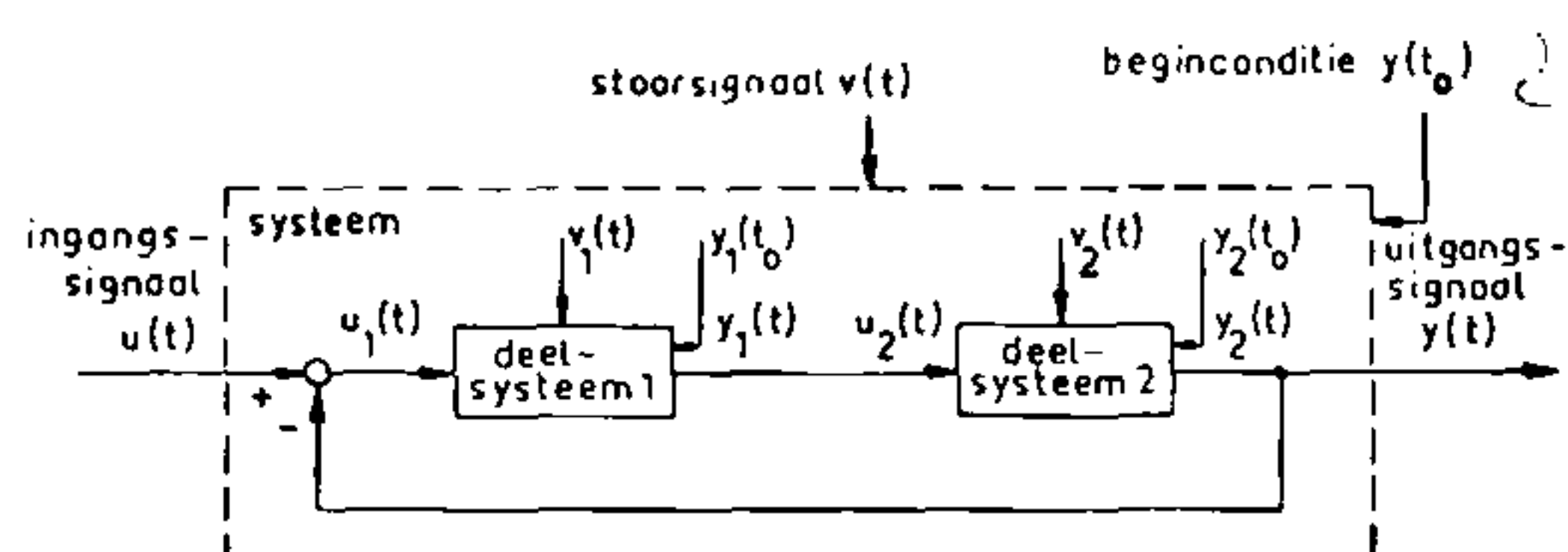
1.2. Algemene systeembeschrijving

Een nadere precisering van het begrip systeem kan als volgt worden gegeven. *Een systeem is een ten aanzien van zijn omgeving afgezonderd gedacht geheel, waarbinnen een zekere ordening heerst, en dat eventueel een zekere wisselwerking met zijn omgeving onderhoudt.*

De wisselwerking tussen een systeem en zijn omge-

* De samenvatting over de systeemleer is geschreven door H.G. Stassen, het deel over automaten en grammatica's is opgesteld door W.J.M. Levelt.

ving komt tot uiting in de zogenaamde ingangsgrootheden en uitgangsgrootheden; de omgeving beïnvloedt het systeem door *ingangsgrootheden*, terwijl het systeem op zijn beurt de omgeving beïnvloedt door *uitgangsgrootheden*. Worden de grootheden als functie van de tijd bestudeerd, dan worden deze meestal als *signalen* aangeduid. De *ingangssignalen* worden onderverdeeld in *stoorsignalen*, de niet beïnvloedbare, en *stuursignalen*, de wel beïnvloedbare signalen. De meest gebruikelijke nomenclatuur op het gebied van de systeemtheorie kent aan de stuursignalen, aan de stoorsignalen en aan de uitgangssignalen respectievelijk de notaties $u(t)$, $v(t)$ en $y(t)$ toe.



Figuur 1. Een voorbeeld van een systeem met stuursignaal $u(t)$, stoorsignaal $v(t)$, uitgangssignaal $y(t)$ en beginconditie $y(t_0)$. De in de figuur gebruikte notatie is in de systeemtheorie de meest gangbare.

Een systeem kan nu worden voorgesteld (figuur 1) als een blok met ingangssignalen $u(t)$ en $v(t)$ en met uitgangssignaal $y(t)$; tussen uitgangssignaal $y(t)$ enerzijds en ingangssignalen $u(t)$ en $v(t)$ anderzijds bestaat een vast verband, hetwelk de basis vormt voor de classificatie van systemen. De beginconditie $y(t_0)$ (de conditie waarin het systeem zich bevindt voordat het ingangssignaal is aangeboden) wordt aan het uitgangssignaal $y(t)$ tenslotte toegevoegd.

Een in dit kader van dit boek belangrijke groep systemen is de groep van *causale systemen*; hieronder wordt verstaan de groep van systemen, waarvan het uitgangssignaal het gevolg is van een aangeboden ingangssignaal. Het uitgangssignaal wordt dan de *responsie* van het systeem genoemd.

1.3. Signaalbeschrijving

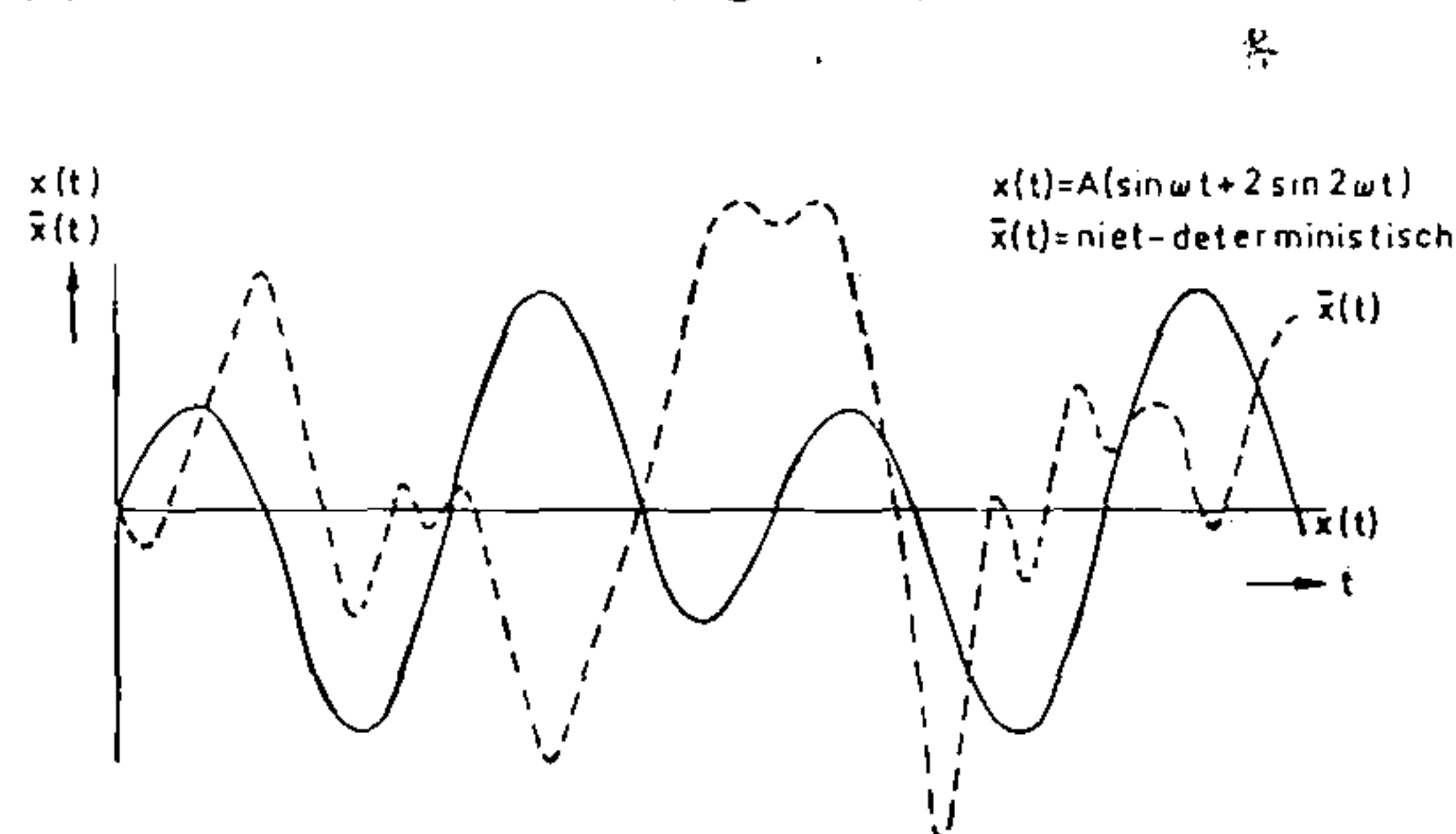
Zonder verlies aan algemeenheid kan het beschrijven van systemen worden teruggebracht tot het beschrijven van signalen en het bepalen van hun onderlinge relaties. Immers het ingangssignaal aangeboden aan

het systeem wordt hierdoor omgezet in een uitgangssignaal; het systeem voert een operatie op het signaal uit. Het is derhalve noodzakelijk eerst op de beschrijving van de verschillende signaaltypen in te gaan.

1.3.1. Indeling van signalen

De wijze waarop signalen kunnen worden beschreven zal van geval tot geval sterk verschillen, deze is sterk afhankelijk van de eigenschappen van het signaal waarin men geïnteresseerd is. Een indeling naar hun specifieke eigenschappen kan als volgt gegeven worden.

– *Deterministisch versus niet-deterministisch of stochastisch*: Een *deterministisch signaal* $x(t)$ is een functie waarvan de grootte voor elke waarde van t eenduidig is vastgelegd. Een *niet-deterministisch* of *stochastisch signaal* $\bar{x}(t)$ is een signaal waarvoor een dergelijke eenduidige relatie niet bestaat; van dit signaaltipe kunnen slechts statistische eigenschappen worden gegeven, zoals de verdelingsdichtheidsfuncties of de daaruit afgeleide momenten (de notatie $\bar{x}(t)$ duidt op een stochastisch signaal, het signaal $x(t)$ is deterministisch) (figuur 2).

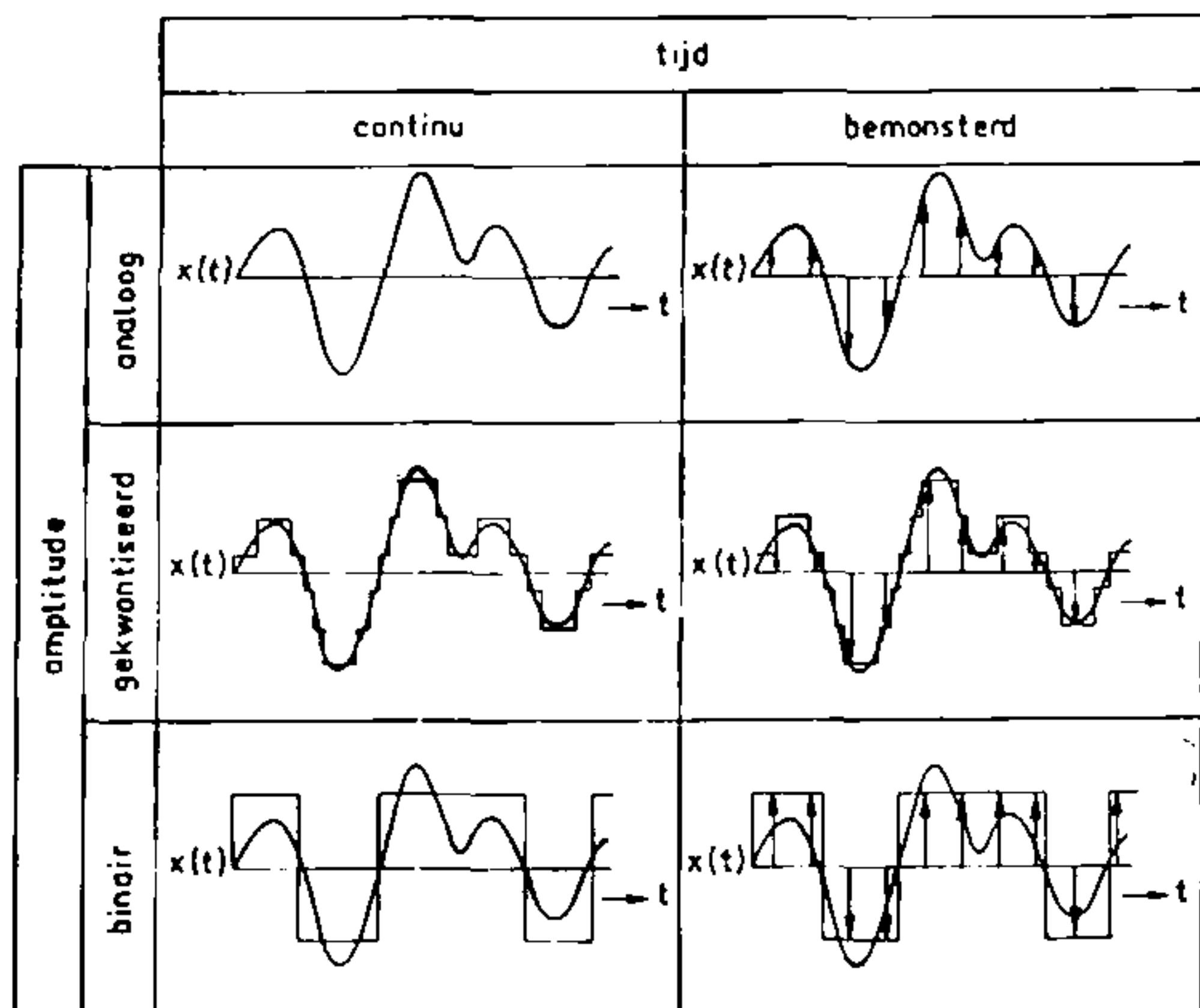


Figuur 2. Een voorbeeld van een deterministisch en een stochastisch signaal.

– *Continu versus bemonsterd*: In het geval van een *continu signaal* is het signaal voor alle waarden van t gedefinieerd; voor dat van een *bemonsterd signaal* is het alleen voor zekere tijdstippen gedefinieerd (figuur 3).

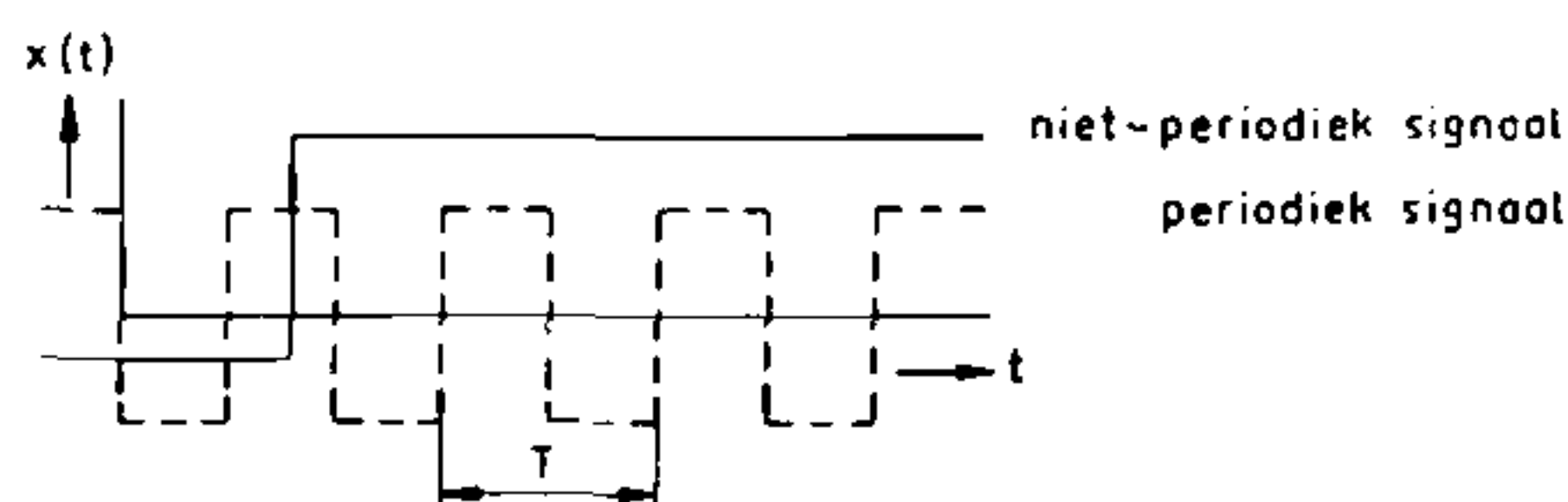
– *Analoog versus gekwantiseerd en binair*: Een signaal wordt *analoog* genoemd als de amplitude van het signaal op een zeker interval in principe een oneindig aantal waarden kan aannemen. Een signaal wordt *gekwantiseerd* genoemd als de amplitude op een zeker interval slechts een eindig aantal waarden

kan aannemen. In het bijzondere geval dat het signaal twee waarden kan aannemen wordt het signaal *binair* genoemd (figuur 3).



Figuur 3. Indeling van signalen; in dit voorbeeld zijn de signalen om een gemiddelde nul getekend.

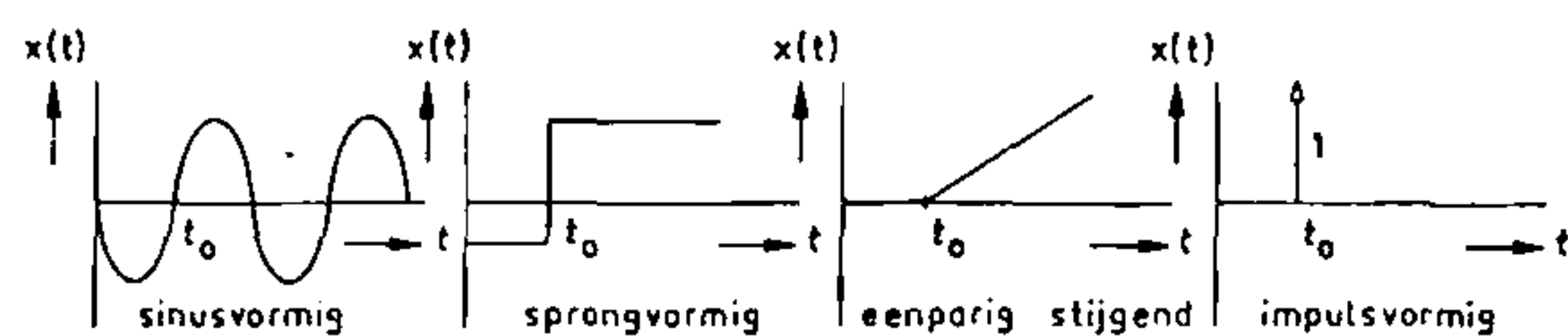
– *Periodiek en niet-periodiek*: Een signaal $x(t)$ is *periodiek* met een eindige periode T indien geldt dat $x(t) = x(t+T)$ voor alle t (figuur 4). Een *niet-periodiek* signaal voldoet hier niet aan; het signaal kan worden opgevat als een periodiek signaal met een oneindig grote periode T .



Figuur 4. Voorbeeld van een periodiek en een niet-periodiek signaal.

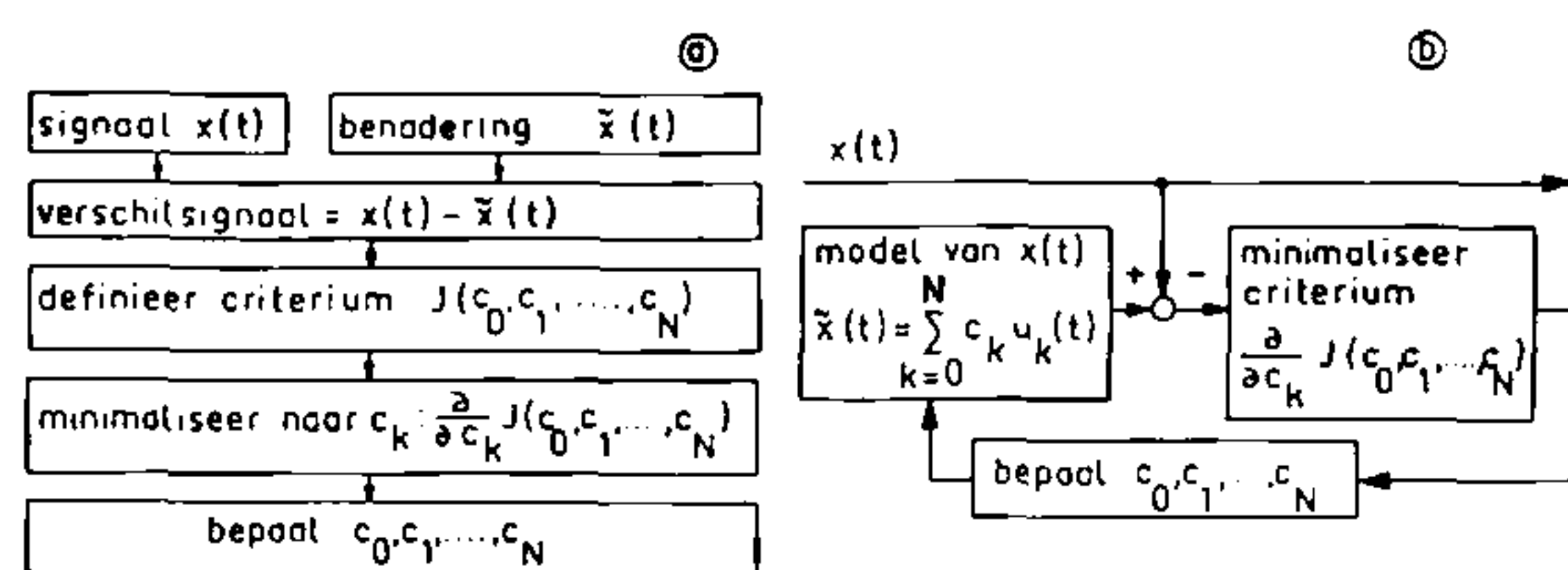
1.3.2. Signaalontbinding in deelsignalen: de fourierreeks

In het kader van deze paragraaf is een onderscheid in deterministisch en stochastisch het belangrijkste. De beschrijving van deterministische signalen kan immers eenvoudig als functie van de tijd geschieden; veel wordt gebruik gemaakt van sinusvormige, sprongvormige, éénparig stijgende of impulsvormige signalen (figuur 5). Nu kan elk deterministisch signaal worden benaderd door de som van een eindig of oneindig aantal *deelsignalen* (figuur 6a). Het nut hier-



Figuur 5. Enkele voorbeelden van veel gebruikte deterministische signalen.

van zal blijken bij de behandeling van de belangrijkste groep systemen, namelijk de lineaire systemen. Voor deze klasse van systemen geldt dat de responsie op de som van een aantal ingangssignalen gelijk is aan de som van de responsies van het systeem op elk van deze ingangssignalen afzonderlijk. Dit houdt dus in dat indien de responsies van een systeem op de deelsignalen bekend zijn de responsie van elk willekeurig deterministisch signaal door sommatie te



Figuur 6. Het ontbinden in deelsignalen.

verkrijgen is. Het ontbinden van een signaal in deelsignalen kan ook gezien worden als het opstellen van een *model* van het signaal, waarvan na bepaling van de structuur van de deelsignalen een aantal onbekende parameters moet worden bepaald (figuur 6b). De procedure voor de signaalontbinding verloopt als volgt. Veronderstel dat het signaal $x(t)$ kan worden benaderd door de som $\tilde{x}(t)$ van een aantal vooraf gekozen deelsignalen $u_k(t)$, elk voorzien van een coëfficiënt c_k waarvan de grootte onbekend is:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=0}^N c_k u_k(t). \quad [1]$$

Veronderstel verder dat geëist wordt dat de benadering op het tijdsinterval $[t_1, t_2]$ volgens onderstaande *criteriumfunctie* J wordt bereikt:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} |x(t) - \tilde{x}(t)|^p w(t) dt. \quad [2]$$

De benadering $\tilde{x}(t)$ van $x(t)$ wordt *optimaal* genoemd indien het criterium J voor $\tilde{x}(t)$ een *minimum* be-

reikt. De in het criterium voorkomende functie $w(t)$ wordt een *weegfunctie* genoemd: de vorm van deze functie bepaalt welk deel van het verschilsignaal $x(t) - \bar{x}(t)$ op het beschouwde interval $[t_1, t_2]$ wordt meegewogen. De in het criterium voorkomende exponent bepaalt de bijdrage van het verschilsignaal op de criteriumwaarde. In verband met de eenvoud van de mathematische afleidingen wordt in de praktijk bijna altijd $p=2$ gekozen, dat wil zeggen dat met een *kwadratisch criterium* wordt gewerkt. De optimale benadering $\bar{x}(t)$ van $x(t)$ wordt nu verkregen door de partiële afgeleiden van J naar elk van de parameters c_k gelijk aan nul te stellen, er volgt dan:

$$\int_{t_1}^{t_2} [x(t) - \sum_{l=0}^N c_l u_l(t)] u_k(t) w(t) dt = 0; \quad k=0, 1, \dots, N. \quad [3]$$

Uit de *normaalvergelijkingen* [3] kunnen in principe de coëfficiënten c_k worden opgelost. Veel rekenwerk kan voorkomen worden door een verstandige keuze voor $u_k(t)$ en $w(t)$ te doen, en wel een zodanige dat geldt:

$$\int_{t_1}^{t_2} u_k(t) u_l(t) w(t) dt = 0 \quad \text{voor } k \neq l; \quad [4] \\ = d_k \quad \text{voor } k = l,$$

waarin d_k een constante is. Uit de normaalvergelijkingen volgt dan direct dat geldt:

$$c_k = \frac{1}{d_k} \int_{t_1}^{t_2} x(t) u_k(t) w(t) dt. \quad [5]$$

Functies $u_k(t)$ waarvoor vergelijking [4] geldt, met $w(t)=1$, worden *orthogonaal op het interval* $[t_1, t_2]$ genoemd.

Er zijn vele functies die aan deze eisen kunnen voldoen, doch de meest toegepaste ontbinding in deelsignalen is ongetwijfeld de ontwikkeling in de zogenaamde *fourierreks*. Deze reeks is gebaseerd op trigonometrische functies: de sinus en cosinus. Stel nu dat een gegeven signaal $x(t)$ op het eindige tijdsinterval $[t_0, t_0+T]$ wordt benaderd door $\bar{x}(t)$, dan geldt voor de *fourierreks*:

$$\bar{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t] \quad [6]$$

waarin $\omega = 2\pi/T$. Uitwerking van de geschetste procedure levert voor $p=2$, $w(t)=1$ en $c_k u_k(t) = a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t$:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt, \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos k\omega t dt \text{ voor } k=1, 2, \dots, \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin k\omega t dt \text{ voor } k=1, 2, \dots \end{aligned} \right\} [7]$$

Met de aldus bepaalde coëfficiënten a_k en b_k kan de *fourierreksontwikkeling* [6] worden uitgewerkt. Zonder in te gaan op de bewijsvoering kunnen onderstaande eigenschappen van de *fourierreks* worden afgeleid.

– De coëfficiënten a_k en b_k zijn alleen afhankelijk van k .

– In de keuze van het interval $[t_0, t_0+T]$ is het begintijdstip t_0 niet van belang.

– Uitbreiding van de benadering $\bar{x}_N(t)$, gebaseerd op de sommatie van N termen, tot $\bar{x}_{N+1}(t)$ leidt tot een lagere criteriumwaarde, dus $J_{N+1} < J_N$.

– De benadering $\bar{x}_N(t)$ zal voor $N \rightarrow \infty$ een exacte weergave van de te beschrijven functie $x(t)$ geven, dus geldt $\lim_{N \rightarrow \infty} J_N = 0$ en $\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{x}_N(t) = x(t)$.

De volgens formule [6] gegeven *fourierreksontwikkeling* wordt in de literatuur vaak anders weergegeven. Zo kan men, uitgaande van de formules van Euler,

$$\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}); \quad \sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}), \quad [8]$$

de *complexe vorm van de fourierreksontwikkeling* afleiden. Dit leidt tot:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k e^{jk\omega t} \quad \text{met } \omega = 2\pi/T, \quad [9]$$

$$r_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jk\omega t} dt, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, [10]$$

waarin de coëfficiënten r_k als volgt zijn gedefinieerd.

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= a_0, \\ r_k &= \frac{1}{2}(a_k - jb_k), \quad k=1, 2, \dots, \\ r_{-k} &= \frac{1}{2}(a_k + jb_k), \quad k=1, 2, \dots \end{aligned} \right\} [11]$$

Eveneens wordt vaak de notatie volgens [12] en [13] gebruikt:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t - \phi_k), \quad [12]$$

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= a_0, & \phi_0 &= 0, \\ A_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, & \phi_k &= \arctg b_k/a_k. \end{aligned} \right\} \quad [13]$$

De termen van de fourierreeksontwikkeling [13] dienen opgevat te worden als sinusvormige deelsignalen met radiaalfrequentie $k\omega$, amplitude A_k en faseverschuiving ϕ_k . Vaak worden de grootheden A_k en ϕ_k als functie van de radiaalfrequentie $k\omega$ uitgezet, tezamen vormen zij het *spectrum* van het signaal $x(t)$. Voor periodieke signalen, en dus eindige periodes T , zal dit spectrum alleen voor radiaalfrequenties $k\omega = k2\pi/T$ bestaan: een dergelijk spectrum heet een *lijnspectrum*. Afbeelding van de amplitudemaat r_k , en dus van $|r_k|$ en $\arg r_k$, resulteert in een *lijnenamplitudespectrum* en een *lijnenfasespectrum*.

Tenslotte dient nog één belangrijke eigenschap, het *theorema van Parseval voor de fourierreeksontwikkeling*, genoemd te worden. Dit theorema is direct af te leiden uit de betrekkingen [6] tot en met [13]. Het luidt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt &= a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_k^2 + b_k^2) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |r_k|^2 = A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_k^2. \end{aligned} \quad [14]$$

Dit theorema geeft aan dat het gemiddelde van het kwadraat van $x(t)$ over het beschouwde interval gelijk is aan de som van de kwadraten van de fouriercoëfficiënten, in feite moet dit theorema dus als een vermogensbalans worden beschouwd.

1.3.3. De fourier- en laplacetransformatie

Uitgaande van de complexe fourierreeksontwikkeling [9] en [10] kan nu het tijdsinterval $[t_0, t_0+T]$ worden uitgebreid tot een oneindig groot interval $[-\infty, \infty]$ door voor $t_0 = -\frac{1}{2}T$ te kiezen, en vervolgens $T \rightarrow \infty$ te laten gaan. Eenvoudig valt af te leiden dat:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu, \quad [15]$$

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi\nu t} dt, \quad [16]$$

waarin de grootheid $X(\nu)$ de *fouriergetransformeerde* van $x(t)$ wordt genoemd. Evenals bij de complexe fourierreeks, kan ook hier een afbeelding van $|X(\nu)|$ en $\arg X(\nu)$ als functie van de frequentie ν worden gegeven. Dit spectrum is nu een *amplitudedichtheidspectrum*, immers:

– bij de overgang van $T \rightarrow \infty$ komen de lijnen, op afstand $2\pi/T$, van het lijnenspectrum van c_k oneindig dicht bij elkaar te liggen;

– de dimensie van $X(\nu)$ zal niet langer die van amplitude zijn zoals bij c_k , doch zal nu die van amplitudedichtheid zijn, een amplitude per frequentie:

$$X(\nu) \triangleq c_k T = C_k / \nu.$$

De hier gedefinieerde fouriertransformatie kan ook nu weer gezien worden als het ontbinden in sinusvormige deelsignalen van het niet-periodieke signaal $x(t)$.

Zeervel oplossingsmethodieken in de signaal- en systeemtheorie maken gebruik van deze transformaties. De *oorspronkelijke functie* of *origineelfunctie* wordt daarbij via een *éénduidige* relatie omgezet in een *beeldfunctie* of *getransformeerde*: men spreekt van het transformeren van het ene *domein* naar het andere. Zo wordt het domein van $x(t)$ het *tijdsdomein* genoemd en dat van $X(\nu)$ het *frequentiedomein*. Van elke beeldfunctie kan nu ook weer het origineel bepaald worden, men noemt dit de *terugtransformatie*. Er geldt:

fouriertransformatie:

$$F\{x(t)\} = X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi\nu t} dt, \quad [16]$$

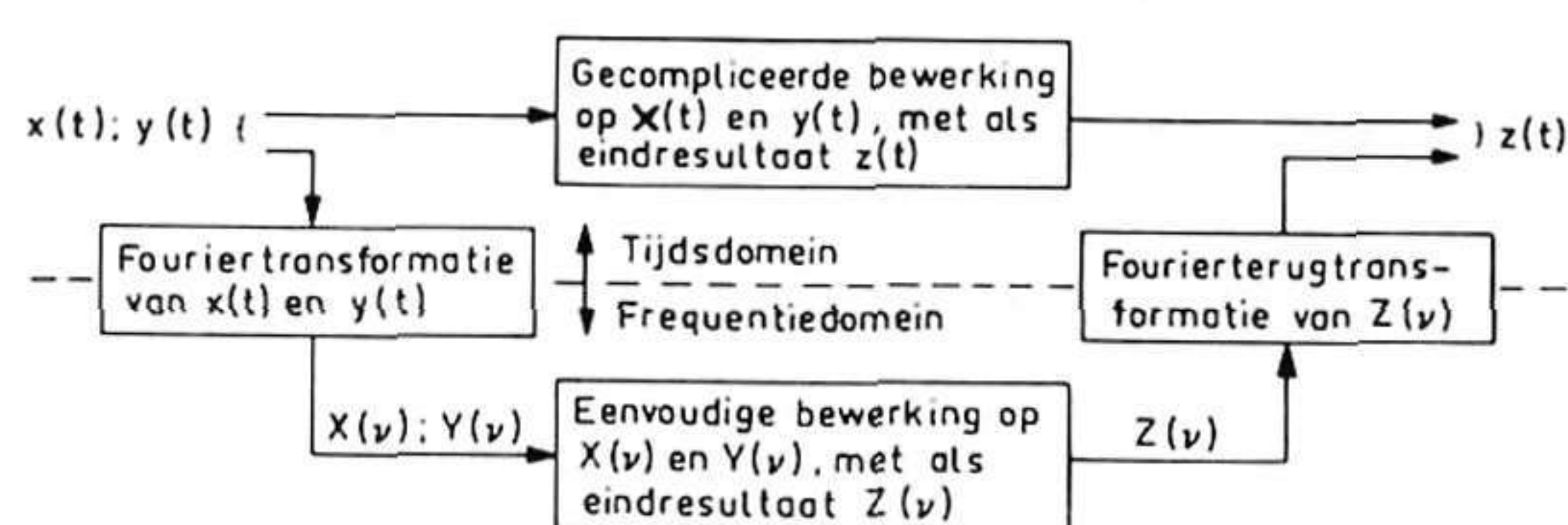
fourierterugtransformatie:

$$F^{-1}\{X(\nu)\} = x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu \quad [15]$$

Het belang van een dergelijke transformatie komt uit onderstaande punten naar voren.

– Transformatie, of ontbinding in deelsignalen, geeft vaak een beter inzicht in de eigenschappen van de origineelfunctie.

– Bepaalde gecompliceerde bewerkingen, zoals het oplossen van integraalvergelijkingen kunnen na transformatie zeer eenvoudig in het nieuw verkregen domein worden berekend; ondanks het feit dat nu



Figuur 7. Toepassing van de fouriertransformatie ter vereenvoudiging van bepaalde mathematische bewerkingen.

echter een transformatie en de terugtransformatie als extra moet worden uitgevoerd kan het vaak lonend zijn (figuur 7) om toch van deze transformaties gebruik te maken.

Van groot belang zal zijn om na te gaan voor welke functies een fouriergetransformeerde bestaat, immers de integralen [15] en [16] zullen moeten convergeren. Zonder in te gaan op het bewijs kan gesteld worden dat een voldoende, doch geen noodzakelijke voorwaarde hiervoor is dat de functie $x(t)$ absoluut integreerbaar is, dus:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty. \quad [17]$$

De klasse toelaatbare functies is als gevolg van deze eis dus beperkt tot de *normale functies*. Een groot aantal belangrijke functies, zoals $x(t)=e^{at}$ met $a>0$, zal nu op grond van [17] geen fouriergetransformeerde bezitten. Dit kan worden vermeden door niet de functie $x(t)$ zelf, doch de functie $e^{-\lambda t}x(t)$, met λ een reële constante, te transformeren. Voor het geval dat $x(t)$ niet convergeert voor $t \rightarrow \infty$ maar wel sterk convergeert voor $t \rightarrow -\infty$, kan nu door een verstandige keuze van de factor $e^{-\lambda t}$ de integraal voor $t \rightarrow \infty$ tot convergentie worden gedwongen, en wel zo dat deze voor $t \rightarrow -\infty$ nog juist convergent blijft. Door het invoeren van de complexe grootte s , de *complexe frequentie* genoemd, $s=\lambda+j2\pi\nu=\lambda+j\omega$ volgt dan direct uit [16] en [15]:

$$\begin{aligned} L_{\Pi}\{x(t)\} &= X_{\Pi}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\lambda t} e^{-j2\pi\nu t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt, \end{aligned} \quad [18]$$

$$\begin{aligned} L_{\Pi}^{-1}\{X_{\Pi}(s)\} &= x(t) = e^{\lambda t} \int_{-\infty}^{\infty} X_{\Pi}(s) e^{j2\pi\nu t} d\nu = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\lambda-j\infty}^{\lambda+j\infty} X_{\Pi}(s) e^{st} ds. \end{aligned} \quad [19]$$

Deze nieuw gedefinieerde transformatie wordt de *dubbelzijdige laplacetransformatie* genoemd. De hierbij geïntroduceerde convergentieafdwingende factor $e^{-\lambda t}$ is echter alleen effectief op één van de beide intervallen $t>0$ of $t<0$, terwijl op het andere interval juist een divergerende werking van deze factor uitgaat, met andere woorden alleen functies die dermate sterk convergeren voor $t \rightarrow -\infty$ dat zelfs na toevoeging van de factor $e^{-\lambda t}$, met $\lambda>0$, de convergentie niet teniet wordt gedaan, zullen de dubbelzijdige laplacetransformatie bezitten. Er zijn maar weinig functies die hieraan voldoen, echter een zeer belangrijke klasse die wel hieraan voldoet is die van de *enkelzijdige* functies, dus die functies die nul zijn voor $t<0$. Bij deze functies zal nu de invloed van $e^{-\lambda t}$ gunstig zijn voor $t>0$, terwijl de integraal toch gelijk is aan nul voor $t<0$. Aldus ontstaat de *enkelzijdige laplace-transformatie*.

$$L\{x(t)\} = X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt, \quad [20]$$

$$L^{-1}\{X(s)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\lambda-j\infty}^{\lambda+j\infty} X(s) e^{st} ds. \quad [21]$$

Een voldoende voorwaarde voor de klasse functies waarvan de enkelzijdige laplacetransformatie bestaat is dat deze functies *normaal* en *exponentieel van de orde q* voor $t>t_m$ moeten zijn, zodat dus geldt $|x(t>t_m)| \leq Me^{qt}$, waarin M en t_m willekeurige eindige constanten zijn.

Analoog aan de beschouwing van de fourierreks en fouriertransformatie kan ook hier weer de laplacetransformatie worden gezien als een ontwikkeling in deelsignalen, zij het dat deze nu niet sinusvormig zijn, doch dat het hier opslingerende sinussen betreft; deze opslingering wordt veroorzaakt door de factor $e^{\lambda t}$.

Tot nog toe is alleen de signaalbeschrijving van continue signalen aan de orde geweest, de toepassing van digitale rekenmachines legt echter een steeds groter wordend accent op de bemonsterde signalen. De behandeling van bemonsterde signalen in de systeemtheorie is principieel niet anders dan die van de continue; de automatentheorie sluit hier direct bij aan. Daar de bemonsterde signalen alleen op zekere tijdstippen zijn gedefinieerd, kan de laplacetransformatie zonder meer niet op een dergelijke getallenreeks worden toegepast. Een gemodificeerde versie van de laplacetransformatie, welke bekend staat als de *Z-transformatie*, is speciaal gericht op de behan-

Tabel 1. Transformatie-eigenschappen.

eigenschap	fouriertransformatie	enkelzijdige laplacetransformatie
transformatie	$F\{x(t)\} = X(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi\nu t} dt$	$L\{x(t)\} = X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$
terugtransformatie	$F^{-1}\{X(\nu)\} = x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu$	$L^{-1}\{X(s)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\lambda-j\infty}^{\lambda+j\infty} X(s) e^{st} ds$
lineariteitseigenschap	$F\{c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)\} = c_1 X_1(\nu) + c_2 X_2(\nu)$	$L\{c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)\} = c_1 X_1(s) + c_2 X_2(s)$
verschuivings- eigenschappen	$F\{x(t-a)\} = e^{-j2\pi a\nu} X(\nu)$ $F^{-1}\{X(\nu+a)\} = e^{-j2\pi a t} x(t)$	$L\{x(t-a) U(t-a)\} = e^{-sa} X(s)$ $L^{-1}\{X(s+a)\} = e^{-at} x(t)$
schaaleigenschappen	$F\{x(at)\} = \frac{1}{ a } X\left(\frac{\nu}{a}\right)$ $F^{-1}\{X(a\nu)\} = \frac{1}{ a } x\left(\frac{t}{a}\right)$	$L\{x(at)\} = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right), \text{ met } a > 0$ $L^{-1}\{X(as)\} = \frac{1}{a} x\left(\frac{t}{a}\right), \text{ met } a > 0$
transformatie van afgeleiden	$F\{\dot{x}(t)\} = j2\pi\nu X(\nu)$ $F\{x^{(n)}(t)\} = (j2\pi\nu)^n X(\nu)$	$L\{\dot{x}(t)\} = s X(s) - x(0)$ $L\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s) - s^{n-1} x(0) - \dots - x^{(n-1)}(0)$
transformatie van een integraal	$F\left\{\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{j2\pi\nu} X(\nu) + \frac{1}{2} X(0) \delta(\nu)$	$L\left\{\int_0^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} X(s)$
vermenigvuldiging met t^n	$F\{t^n x(t)\} = \left(\frac{j}{2\pi}\right)^n \frac{d^n X(\nu)}{d\nu^n}$	$L\{t^n x(t)\} = (-1)^n \frac{d^n X(s)}{ds^n}$
deling door t	$F\left\{\frac{x(t)}{t}\right\} = j2\pi \int_{\nu}^{\infty} X(\xi) d\xi$	$L\left\{\frac{x(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} X(\sigma) d\sigma$
transformatie van een periodieke functie met periode T: $x(t) = x(t+T)$	$F\{x(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi k t/T} dt \right] \delta\left(\nu - \frac{k}{T}\right)$	$L\{x(t)\} = \frac{\int_0^T x(t) e^{-st} dt}{1 - e^{-sT}}$
convolutie- eigenschappen	$F\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau\right\} = X_1(\nu) X_2(\nu)$ $F\{x_1(t) x_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\xi) X_2(\nu-\xi) d\xi$	$L\left\{\int_0^t x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau\right\} = X_1(s) X_2(s)$ $L\{x_1(t) x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X_1(\sigma) X_2(s-\sigma) d\sigma;$ $Re(s) > \max(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2); \lambda_1 < c < Re(s) - \lambda_2$
asymptotische eigenschappen	$\lim_{\nu \rightarrow \infty} X(\nu) = 0$	$\lim_{s \rightarrow \infty} X(s) = 0$ $\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{t \downarrow 0} x(t)$ $\lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$

deling van dergelijke bemonsterde signalen.

Binnen het kader van dit Handboek lijkt het ongewenst te veel aandacht aan de eigenschappen en berekeningsmethoden van de transformaties te wijden. Er zal hier slechts volstaan worden met een overzicht van de belangrijkste eigenschappen van de fourier- en enkelzijdige laplacetransformatie; deze zijn weergegeven in tabel 1. In het bijzonder moet de transformatie van de later te bespreken *convolutieintegraal* worden genoemd:

$$\left. \begin{aligned} L\left\{\int_0^t x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau\right\} &= X_1(s)X_2(s), \\ L\{x_1(t)x_2(t)\} &= \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X_1(\sigma)X_2(s-\sigma)d\sigma. \end{aligned} \right\} [22]$$

De betrekkingen [22] illustreren goed het belang van de transformatietechnieken. Een zeker niet minder belangrijke eigenschap is die van de *transformatie van de afgeleide van een functie*, voor de laplacetransformatie geldt:

$$\begin{aligned} L\{x^{(n)}(t)\} &= \\ &= s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - \dots - x^{(n-1)}(0). \end{aligned} [23]$$

De vergelijking [23] levert de basis voor het oplossen van differentiaalvergelijkingen, en dus voor het beschrijven van systemen. Het oplossen van deze differentiaalvergelijkingen met behulp van de laplacetransformatie leidt tot het verkrijgen van de *totale oplossing*, dus de *vrije of homogene oplossing* en de *gedwongen oplossing* (integratie-interval $[0, \infty]$), terwijl met behulp van de fouriertransformatie alleen de gedwongen oplossing wordt verkregen (integratie-interval $[-\infty, \infty]$). In het algemeen kan dan ook gesteld worden dat de laplacetransformatie bij uitstek geschikt is voor het oplossen van differentiaalvergelijkingen, en wel voor de gewone lineaire differentiaalvergelijkingen met constante en met tijdsafhankelijke coëfficiënten alsmede voor de lineaire partiële differentiaalvergelijkingen, terwijl de fouriertransformatie juist voor het ontbinden in deelsignalen van het grootste belang is. Met behulp van de in tabel 1 gegeven eigenschappen en de in bijna elk handboek over transformaties te vinden tabellen van de belangrijkste origineelfuncties met de bijbehorende

Tabel 2. Origineelfuncties met bijbehorende beeldfuncties.

origineel-functie	fouriergetransformeerde $\chi(\nu)$	enkelzijdige laplacegetransformeerde $\chi(s)$
* $\delta(t-t_0)$	$e^{-j2\pi\nu t_0}$	e^{-st_0}
$\delta(t)$	1	1
** $U(t-t_0)$	$\frac{1}{j2\pi\nu} e^{-j2\pi\nu t_0} + \delta(\nu)$	e^{-st_0}/s
$U(t)$	$\frac{1}{j2\pi\nu} + \delta(\nu)$	$1/s$
1	$\delta(\nu)$	
*** $t U(t)$	$\frac{1}{2} j\delta'(\nu) - \frac{1}{(2\pi\nu)^2}$	$1/s^2$
t	$j\delta'(\nu)$	
$t^a U(t)$	$j^n \delta^{(a)}(\nu) + \frac{\Gamma(a+1)}{(j2\pi\nu)^{a+1}}$ a geheel > 0	$\Gamma(a+1)/s^{a+1}$
t^a	$j^n \delta^{(a)}(\nu)$ a geheel > 0	
$e^{-bt} U(t)$	$1/(j2\pi\nu + b)$	$1/(s+b)$
$te^{-bt} U(t)$	$1/(j2\pi\nu + b)^2$	$1/(s+b)^2$
$t^a e^{-bt} U(t)$	$\Gamma(a+1)/(j2\pi\nu + b)^{a+1}$	$\Gamma(a+1)/(s+b)^{a+1}$
$e^{j2\pi\nu_0 t}$	$\delta(\nu - \nu_0)$	
$\sin at$	$\frac{1}{2j} \left\{ \delta\left(\nu + \frac{a}{2\pi}\right) - \delta\left(\nu - \frac{a}{2\pi}\right) \right\}$	$a/(s^2 + a^2)$
$\cos at$	$\frac{1}{2} \left\{ \delta\left(\nu + \frac{a}{2\pi}\right) + \delta\left(\nu - \frac{a}{2\pi}\right) \right\}$	$s/(s^2 + a^2)$
$\text{sign } t$	$\frac{1}{j\pi\nu}$	

* $\delta(t)$ = impulsfunctie; ** $U(t)$ = eenheidssprongfunctie;

*** $tU(t)$ = eenparig stijgend signaal.

beeldfuncties is vrijwel elke transformatie eenvoudig uit te voeren. In tabel 2 worden tenslotte van een aantal frequent voorkomende functies in de systeemtheorie de origineelfuncties met bijbehorende beeldfuncties gegeven.

1.3.4. Beschrijving van stochastische signalen

In paragraaf 1.3.1. is reeds gewezen op het feit dat voor stochastische signalen geen eenduidige relatie

met de tijd bestaat, de beschrijving van dit type signalen vindt plaats in termen van waarschijnlijkheden, en wel met behulp van verdelingsdichtheidsfuncties. Hierbij wordt gebruik gemaakt van begrippen uit de waarschijnlijkheidsrekening, waarin de verdelingsdichtheidsfunctie $f_{\bar{x}}(x)$ van de random variabele $\bar{x}(\xi)$ (de random variabele $\bar{x}(\xi)$ is de verzameling getallen behorend bij de uitkomsten ξ gebaseerd op de gehele uitkomstenruimte S) als volgt gedefinieerd is:

$$f_{\bar{x}}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Pr\{x < \bar{x}(\xi) \leq x + \Delta x\} / \Delta x. \quad [24]$$

De grootheid $f_{\bar{x}}(x)\Delta x$ geeft dus de kans weer dat de random variabele $\bar{x}(\xi)$ tussen de waarden x en $x + \Delta x$ in ligt. Indien nu de random variabele $\bar{x}(\xi)$ tevens een functie van de tijd is, zodat de functie $\bar{x}(t; \xi)$ een functie van de tijd t en de uitkomst ξ is, dan ontstaat een verzameling van tijdsfuncties, welke een stochastisch proces wordt genoemd. De realisering $\bar{x}(t; \xi_0)$ behorend bij de uitkomst ξ_0 is dus een tijdsfunctie; het stochastisch proces op een zeker tijdstip t_0 moet beschouwd worden als een random variabele $\bar{x}(t_0, \xi)$. De waarschijnlijkheidsrekening heeft betrekking op random variabelen, en kan dus betrokken worden op een stochastisch proces op een zeker tijdstip t ; in dit geval zal de verdelingsdichtheidsfunctie dan een functie van de tijd t zijn; er volgt:

$$f_{\bar{x}}(x, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Pr\{x < \bar{x}(t; \xi) \leq x + \Delta x\} / \Delta x. \quad [25]$$

Vrijwel altijd worden stationaire stochastische processen beschouwd. Hiervoor geldt dat de verdelingsdichtheidsfunctie onafhankelijk van de tijd t is, zodat dan geldt:

$$f_{\bar{x}}(x, t) = f_{\bar{x}}(x, t + \Delta t) = f_{\bar{x}}(x) \text{ voor alle } \Delta t. \quad [26]$$

Uit deze verdelingsdichtheidsfunctie kunnen volgens de waarschijnlijkheidsrekening een aantal belangrijke statistische grootheden worden bepaald, zoals de gemiddelde waarde of mathematische verwachting $\eta_{\bar{x}}$:

$$\eta_{\bar{x}} = E\{\bar{x}(t; \xi)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\bar{x}}(x) dx \quad [27]$$

en de gemiddelde kwadratische afwijking of variantie $\sigma_{\bar{x}}^2$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{x}}^2 &= E\{[\bar{x}(t; \xi) - \eta_{\bar{x}}]^2\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x - \eta_{\bar{x}}]^2 f_{\bar{x}}(x) dx. \end{aligned} \quad [28]$$

De vergelijkingen [27] en [28] geven alleen statische informatie over het stochastisch proces; dynamische informatie zoals de frequentie-inhoud of de afhankelijkheid als functie van de tijd kan worden verkregen uit de gezamenlijke verdelingsdichtheidsfunctie $f_{\bar{x}\bar{x}}(x_1, x_2, \tau)$:

$$\begin{aligned} f_{\bar{x}\bar{x}}(x_1, x_2, \tau) &= \lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \Delta x_2 \rightarrow 0}} \Pr\{x_1 < \bar{x}(t; \xi) \leq x_1 + \Delta x_1, \\ &x_2 < \bar{x}(t + \tau; \xi) \leq x_2 + \Delta x_2\} / \Delta x_1 \Delta x_2. \end{aligned} \quad [29]$$

Evenals in de waarschijnlijkheidsrekening tussen twee random variabelen een correlatiecoëfficiënt kan worden gedefinieerd, kan uitgaande van het stochastisch proces ten tijde t en dat ten tijde $t + \tau$ een drietal begrippen worden gedefinieerd die iets vertellen over de afhankelijkheid van het proces op verschillende tijden.

Deze begrippen zijn de gemiddelde produktfunctie $R_{\bar{x}\bar{x}}(\tau)$:

$$\begin{aligned} R_{\bar{x}\bar{x}}(\tau) &= E\{\bar{x}(t; \xi) \bar{x}(t + \tau; \xi)\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{\bar{x}\bar{x}}(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2, \end{aligned} \quad [30]$$

de covariantiefunctie $C_{\bar{x}\bar{x}}(\tau)$:

$$\begin{aligned} C_{\bar{x}\bar{x}}(\tau) &= E\{[\bar{x}(t; \xi) - \eta_{\bar{x}}][\bar{x}(t + \tau; \xi) - \eta_{\bar{x}}]\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - \eta_{\bar{x}}][x_2 - \eta_{\bar{x}}] f_{\bar{x}\bar{x}}(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad [31]$$

en tenslotte de correlatiefunctie $K_{\bar{x}\bar{x}}(\tau)$:

$$K_{\bar{x}\bar{x}}(\tau) = C_{\bar{x}\bar{x}}(\tau) / \sigma_{\bar{x}}^2. \quad [32]$$

Het karakteriseren van een stochastisch proces door bovenstaande statistische eigenschappen geeft een beschrijving in het ensemble of uitkomstendomein; de statistische grootheden [27] tot en met [32] ontstaan door uitmiddeling over de uitkomsten ξ . In de systeemtheorie heeft men echter te maken met tijdsfuncties of signalen. Het is daarom noodzakelijk om een relatie te leggen tussen de statistische grootheden in het ensembledomein en een beschrijving in het tijdsdomein. Dit geschiedt via de schattingstheorie. Daartoe worden nu eerst voor het stationaire stochastische proces $\bar{x}(t; \xi)$ de volgende schatters in het tijdsdomein gedefinieerd:

$$\hat{\eta}_{\bar{x}}(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \bar{x}(t; \xi) dt, \quad [33]$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}}^2(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [\bar{x}(t; \xi) - \hat{\eta}_{\bar{x}}(\xi)]^2 dt, \quad [34]$$

$$\hat{R}_{\bar{x}\bar{x}}(\tau; \xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \bar{x}(t; \xi) \bar{x}(t+\tau; \xi) dt, \quad [35]$$

$$\hat{C}_{\bar{x}\bar{x}}(\tau; \xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [\bar{x}(t; \xi) - \hat{\eta}_{\bar{x}}(\xi)] [\bar{x}(t+\tau; \xi) - \hat{\eta}_{\bar{x}}(\xi)] dt, \quad [36]$$

$$\hat{K}_{\bar{x}\bar{x}}(\tau; \xi) = \hat{C}_{\bar{x}\bar{x}}(\tau; \xi) / \hat{\sigma}_{\bar{x}}^2(\xi). \quad [37]$$

De schatters [33] tot en met [37] kunnen nu in verband gebracht worden met de grootheden [27] tot en met [32], zodat daarmee een relatie wordt gelegd tussen een uitmidding in het tijdsdomein en in het ensembledomein (ergodiciteit).

Zo wordt een stationair stochastisch proces met een gemiddelde waarde $\eta_{\bar{x}}$:

$$E\{\hat{\eta}_{\bar{x}}(\xi)\} = \eta_{\bar{x}} \quad [38]$$

en met een variantie van de schatter $\hat{\eta}_{\bar{x}}$ volgens [39]

$$E\{[\hat{\eta}_{\bar{x}}(\xi) - \eta_{\bar{x}}]^2\} = 0 \quad [39]$$

ergodisch met betrekking tot de gemiddelde waarde genoemd. Wanneer de schatter [33] voldoet aan [38] spreekt men van een *zuivere schatter*; voldoet hij tevens aan [39] dan heet deze *asymptotisch raak*. Een dergelijke redenering geldt ook voor de schatters [34] tot en met [37]; aangetoond kan worden dat deze schatters alle asymptotisch raak zijn. Indien alle statistische eigenschappen aan deze eisen voldoen spreekt men van *ergodisch in de meest algemene zin*. De ergodische eigenschap van een stochastisch proces vormt de basis van het beschrijven van tijdsfuncties; immers deze legt een verband tussen het beschrijven van een tijdsfunctie in het *tijdsdomein* en het berekenen van de eigenschappen van een stationair stochastisch proces in het *ensembledomein*.

Het ontbinden van stochastische signalen in deelsignalen is zonder meer niet zinvol; enerzijds is door het niet aanwezig zijn van een direct verband van het stochastische proces $\bar{x}(t; \xi)$ als functie van t een direc-

te transformatie onmogelijk, anderzijds zou het transformeren van slechts één enkele realisering $\bar{x}(t; \xi_i)$ van het stochastische proces $\bar{x}(t; \xi)$ op het interval $[0, T]$ slechts karakteristiek zijn voor die enkele realisering van het proces, en dus zeker niet voor het proces als geheel. Een grootheid die wel een statistische eigenschap van het stochastische proces $\bar{x}(t; \xi)$ weergeeft, is het zogenaamde *vermogensdichtheidsspectrum* $S_{\bar{x}\bar{x}}(\nu)$, welke als de fouriergetransformeerde van de gemiddelde produktfunctie $R_{\bar{x}\bar{x}}(\tau)$ is gedefinieerd:

$$S_{\bar{x}\bar{x}}(\nu) = F\{R_{\bar{x}\bar{x}}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\bar{x}\bar{x}}(\tau) e^{-j2\pi\nu\tau} d\tau, \quad [40]$$

$$R_{\bar{x}\bar{x}}(\tau) = F^{-1}\{S_{\bar{x}\bar{x}}(\nu)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\bar{x}\bar{x}}(\nu) e^{j2\pi\nu\tau} d\nu. \quad [41]$$

De benaming van de grootheid $S_{\bar{x}\bar{x}}(\nu)$ kan op de volgende wijze verklaard worden. Voor een ergodisch stochastisch proces $\bar{x}(t; \xi)$ kan de gemiddelde produktfunctie $R_{\bar{x}\bar{x}}(\tau)$ volgens [42] worden genoteerd:

$$R_{\bar{x}\bar{x}}(\tau) = E\{\hat{R}_{\bar{x}\bar{x}}(\tau)\} = E\left\{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \bar{x}(t; \xi) \bar{x}(t+\tau; \xi) dt\right\}. \quad [42]$$

Uitgaande van de definitie van de fouriergetransformeerde volgt dan na enig rekenwerk uit [40]:

$$S_{\bar{x}\bar{x}}(\nu) = F\{R_{\bar{x}\bar{x}}(\tau)\} = E\left\{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |\bar{X}(\nu; \xi)|^2\right\}, \quad [43]$$

waarin $\bar{X}(\nu; \xi)$ de fouriergetransformeerde van een realisering van het stochastisch proces $\bar{x}(t; \xi)$ voorstelt:

$$\begin{aligned} \bar{X}(\nu; \xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{x}(t; \xi) e^{-j2\pi\nu t} dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \bar{x}(t; \xi) e^{-j2\pi\nu t} dt. \end{aligned} \quad [44]$$

Met andere woorden, $\bar{X}(\nu; \xi)$ is het amplitudedichtheidsspectrum van de realisering $\bar{x}(t; \xi)$ en $|\bar{X}(\nu; \xi)|^2$

is de vermogensdichtheid als functie van de frequentie ν ; de grootheid $S_{\bar{x}\bar{x}}(\nu)$ is nu het ensemblegemiddelde over de realiseringen ξ van de gemiddelde vermogensdichtheid $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |\bar{X}(\nu; \xi)|^2$. Hiermede is duidelijk geworden dat de grootheid $S_{\bar{x}\bar{x}}(\nu)$ een statistische grootheid in het frequentiedomein van het stochastisch proces $\bar{x}(t; \xi)$ is geworden; deze grootheid geeft als het ware aan hoe het gemiddelde vermogen van het stochastische proces $\bar{x}(t; \xi)$ over de verschillende frequenties is verdeeld.

Ook voor de spectrale dichtheid is het van belang om een schatter te definiëren. Het lijkt logisch deze schatter te definiëren op basis van de gemiddelde produktfunctie:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{\bar{x}\bar{x}}(\nu; \xi) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \hat{R}_{\bar{x}\bar{x}}(\tau; \xi) e^{-j2\pi\nu\tau} d\tau = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T \bar{x}(t; \xi) e^{-j2\pi\nu t} dt \right|^2. \end{aligned} \quad [45]$$

Aan te tonen valt dat deze schatter zuiver is, dus $E\{\hat{S}_{\bar{x}\bar{x}}(\nu; \xi)\} = S_{\bar{x}\bar{x}}(\nu)$; echter deze is niet asymptotisch raak; de variantie in de schatter (aangenomen dat $\bar{x}(t; \xi)$ een normaal verdeeld stochastisch proces is):

$$E\{[\hat{S}_{\bar{x}\bar{x}}(\nu; \xi) - E\{\hat{S}_{\bar{x}\bar{x}}(\nu; \xi)\}]^2\} = S_{\bar{x}\bar{x}}^2(\nu) \quad [46]$$

en verschilt dus van nul.

Daarom wordt in de praktijk altijd de zuivere en asymptotisch rake schatter $\hat{S}_{\bar{x}\bar{x}}(\nu; \xi)$ gebruikt:

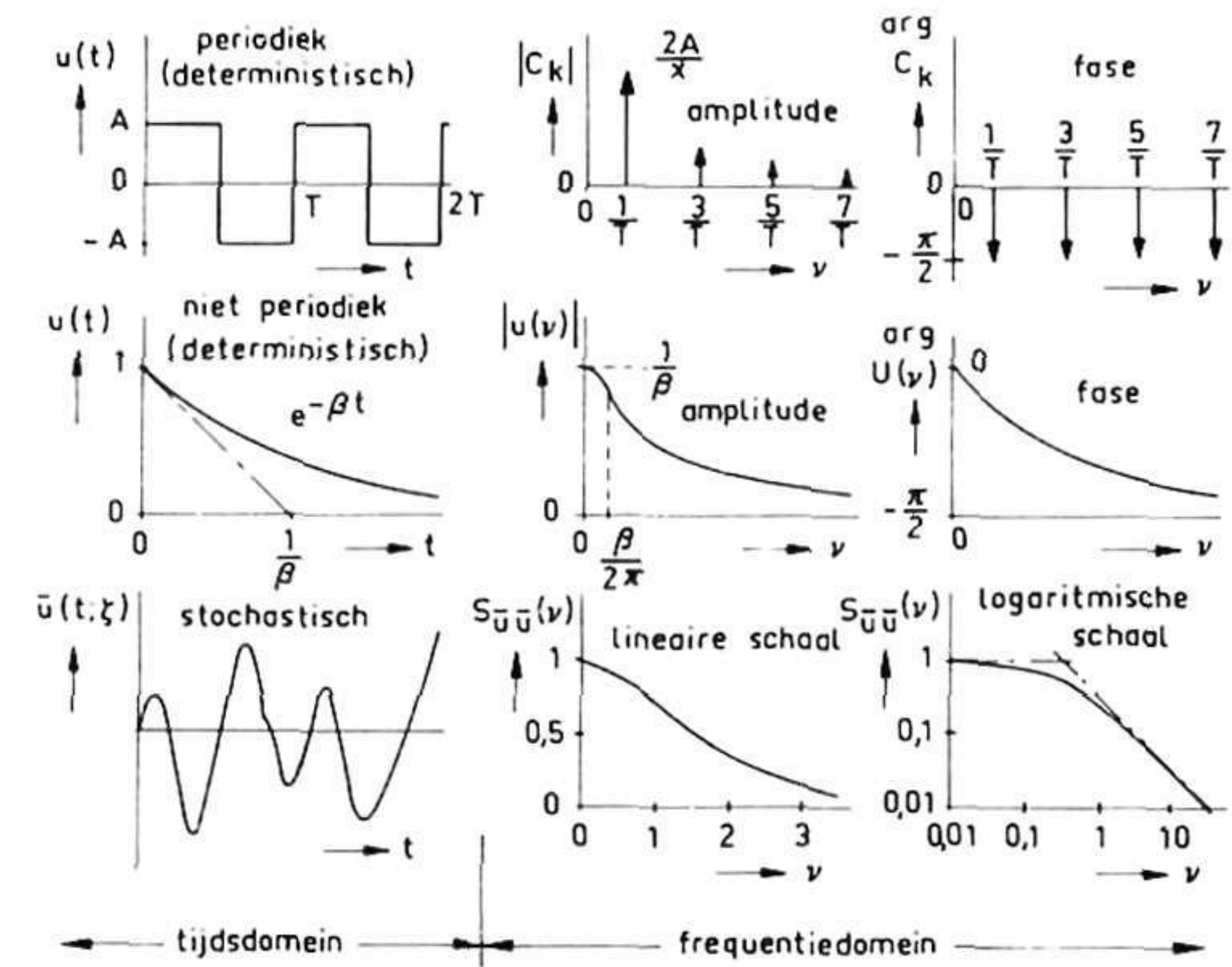
$$\hat{S}_{\bar{x}\bar{x}}(\nu; \xi) = \frac{\int_{\nu-\Delta\nu}^{\nu+\Delta\nu} \hat{S}_{\bar{x}\bar{x}}(\alpha; \xi) d\alpha}{2\Delta\nu}, \text{ met } \Delta\nu \neq 0. \quad [47]$$

Het asymptotisch raak zijn wordt nu verkregen door een uitmiddeling van het vermogen van oneindig veel sinusvormige deelsignalen over een eindig frequentiegebied $2\Delta\nu$.

Een voorbeeld van de beschrijving van enkele signalen in het tijdsdomein en het frequentiedomein is gegeven in figuur 8.

1.4. Systeembeschrijving

Nu de methodieken om signalen te beschrijven behandeld zijn, kan nader worden ingegaan op de sys-



Figuur 8. Voorbeelden van deterministische, periodieke en niet-periodieke, en stochastische signalen in tijds- en frequentiedomein.

teemtheorie zelf. Het is daartoe zinvol eerst een classificatie van systemen op te stellen, en dus de systemen in te delen naar hun specifieke eigenschappen.

1.4.1. Indeling van systemen

In tabel 3 is een indeling van systemen gegeven; hier sluiten de eigenschappen in de rijen elkaar uit, in de kolommen daarentegen kunnen zij elkaar overlappen: *Statisch* versus *dynamisch*: Een *statisch* systeem is een systeem, waarvan het uitgangssignaal $y(t)$ op het tijdstip t_e alleen afhangt van de grootte van het ingangssignaal $u(t)$ op het moment t_e en van het tijdstip t_e zelf. Bij een *dynamisch* systeem is het uitgangssignaal op het tijdstip t behalve van de grootte van het ingangssignaal $u(t)$ op dit tijdstip ook nog afhankelijk van het verloop van het ingangssignaal over de voorafgaande tijd.

$$\text{Statisch: } y(t_e) = f\{u(t_e), t_e\} \quad [48]$$

$$\text{Dynamisch: } y(t_e) = f\{y(t:t_0, t_e), t; y(t_0)\} \quad [49]$$

waarin de notatie $u(t:t_0, t_e)$ betekent het signaal $u(t)$ op het interval t_0 tot t_e , en waarin $y(t_0)$ de beginconditie wordt genoemd. Statische systemen worden door algebraïsche vergelijkingen beschreven, dynamische door differentiaal- of differentievergelijkingen.

— *Geconcentreerd* versus *verdeeld*: Bij een *verdeeld* systeem zullen de variabelen behalve van de tijd ook van de ruimtelijke coördinaten afhangen. De ingangs-

Tabel 3. Indeling van systemen.

systeemindeling	elkaar uitsluitende eigenschappen	
elkaar overlappende eigenschappen	statisch	dynamisch
	geconcentreerd	verdeeld
	constant	tijdsafhankelijk
	deterministisch	stochastisch
	lineair	niet-lineair
	continu	discreet
	scalair	multivariabel

uitgangsrelaties zullen derhalve door partiële differentiaal- of differentievergelijkingen worden beschreven. Bij een *geconcentreerd* systeem zijn de variabelen alleen functies van de tijd, zij worden door gewone differentiaal- of differentievergelijkingen beschreven.

– *Constant* versus *tijdsafhankelijk*: Een systeem wordt beschreven door ingangs-uitgangsrelaties, waarvan de *structuur* en de *systeemparemeters* bepalend zijn voor het systeemgedrag. Zijn nu deze systeemparemeters tijdsafhankelijk dan spreekt men van *constante systemen*, zijn deze parameters tijdsafhankelijk dan spreekt men van *tijdsafhankelijke systemen*. Voor een tijdsafhankelijk systeem is de systeemresponsie $y(t_e)$ derhalve:

$$y(t_e) = f[u(t:t_0, t_e), t; y(t_0)]; \quad [50]$$

voor een constant systeem geldt:

$$y(t_e) = f[u(t:t_0, t_e); y(t_0)]. \quad [51]$$

Opgemerkt moet worden dat, alhoewel minder voorkomend, een dergelijk onderscheid ook gemaakt kan worden ten aanzien van de structuur van een systeem.

– *Deterministisch* versus *stochastisch*: Een *deterministisch* systeem is een systeem waarvan de structuur en de systeemparemeters expliciet als functie van de tijd t gedefinieerd zijn; van een *stochastisch* systeem daarentegen kunnen structuur en systeemparemeters alleen in termen van kansen worden bepaald.

– *Lineair* versus *niet-lineair*: Stel dat de responsie van een systeem met beginconditie $y_I(t_0)$ en ingangssignaal $u_I(t:t_0, t_e)$ gelijk is aan $y_I(t_e)$, en dat de responsie op beginconditie $y_{II}(t_0)$ en ingangs $u_{II}(t:t_0, t_e)$ gelijk aan $y_{II}(t_e)$ is, dan wordt een systeem *lineair* genoemd indien geldt dat:

– Het systeem *lineair* is in het ingangssignaal:

$$\begin{aligned} & f[c_I u_I(t:t_0, t_e), t; y(t_0)] - f[c_{II} u_{II}(t:t_0, t_e), t; y(t_0)] = \\ & = f[c_I u_I(t:t_0, t_e) - c_{II} u_{II}(t:t_0, t_e), t; 0], \end{aligned} \quad [52]$$

met andere woorden, het verschil tussen de systeemresponsie op verschillende ingangssignalen $c_I u_I(t:t_0, t_e)$ en $c_{II} u_{II}(t:t_0, t_e)$ maar bij dezelfde beginvoorwaarde $y(t_0)$ moet gelijk zijn aan de systeemresponsie op het ingangssignaal $c_I u_I(t:t_0, t_e) - c_{II} u_{II}(t:t_0, t_e)$ bij de beginvoorwaarde nul.

– Het systeem *lineair* is in de beginvoorwaarde:

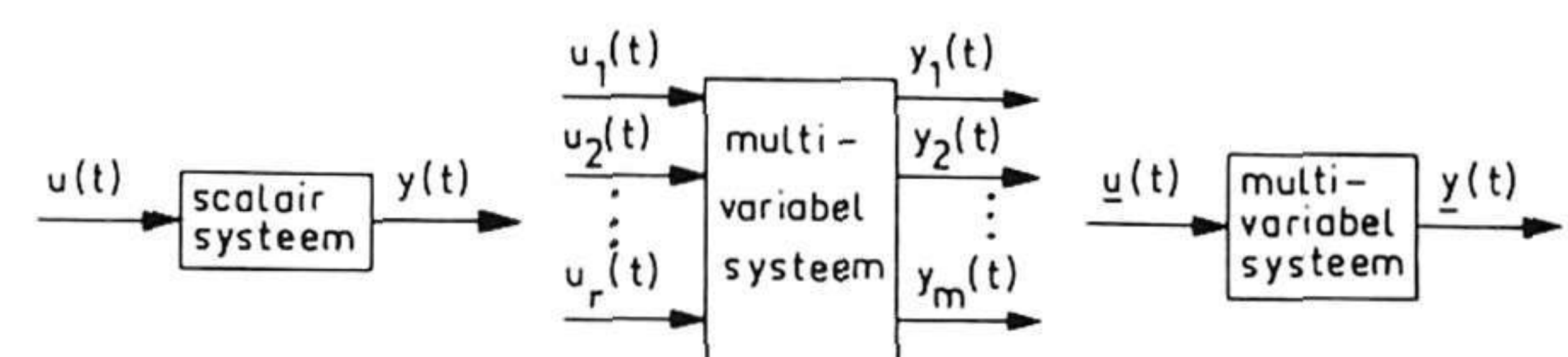
$$\begin{aligned} & f[u(t:t_0, t_e), t; c_I y_I(t_0)] - f[u(t:t_0, t_e), t; c_{II} y_{II}(t_0)] = \\ & = f[0, t; c_I y_I(t_0) - c_{II} y_{II}(t_0)], \end{aligned} \quad [53]$$

met andere woorden, het verschil tussen de systeemresponsies op hetzelfde ingangssignaal $u(t:t_0, t_e)$ maar bij verschillende beginvoorwaarden $c_I y_I(t_0)$, respectievelijk $c_{II} y_{II}(t_0)$ moet gelijk zijn aan de systeemresponsie op het ingangssignaal nul bij de beginvoorwaarde $c_I y_I(t_0) - c_{II} y_{II}(t_0)$.

Aan bovengenoemde lineariteitseigenschappen van een lineair systeem dient te worden voldaan voor alle $y(t_0)$, $u(t:t_0, t_e)$, t_0 , t_e en c . Een systeem dat niet aan de lineariteitseigenschappen voldoet, wordt per definitie een *niet-lineair* systeem genoemd.

– *Continu* versus *discreet*: *Continue systemen* zijn systemen waarvan de in- en uitgangssignalen continu zijn; zijn deze echter bemonsterd en dus op een aantal discrete tijdstippen bekend, dan spreekt men van *discrete systemen*. Continue systemen worden beschreven door differentiaalvergelijkingen, discrete door differentievergelijkingen.

– *Scalair* versus *multivariabel*: Een *scalair* systeem is een systeem met één ingangssignaal en één uitgangssignaal; een systeem met meerdere ingangs- en/of meerdere uitgangssignalen wordt een *multivariabel* systeem genoemd (figuur 9). Teneinde een overzichtelijke behandeling van multivariabele systemen mogelijk te maken worden vaak vectoriële grootheden ingevoerd. De beschrijving van een multivariabel systeem met r ingangssignalen en m uitgangssignalen,



Figuur 9. Schematische voorstelling van een scalair en multi-variabel systeem.

$$\begin{aligned}
y_1(t_e) &= \\
&= f_1[u_1(t:t_0, t_e), \dots, u_r(t:t_0, t_e), t; y_1(t_0) \dots y_m(t_0)], \\
&\vdots \\
y_m(t_e) &= \\
&= f_m[u_1(t:t_0, t_e), \dots, u_r(t:t_0, t_e), t; y_1(t_0) \dots y_m(t_0)],
\end{aligned}
\quad [54]$$

kan dan kortweg als volgt worden genoteerd:

$$\underline{y}(t_e) = \underline{f}[\underline{u}(t:t_0, t_e), t; \underline{y}(t_0)]. \quad [55]$$

Deze schrijfwijze is sterk verbonden met de later te behandelen *toestandsbeschrijving*.

Een speciale klasse van dynamische systemen wordt nog gevormd door de constante discrete systemen. Deze systemen worden gewoonlijk *automaten* genoemd. Zij zijn verwant met *grammatica's* en worden apart behandeld in 2.

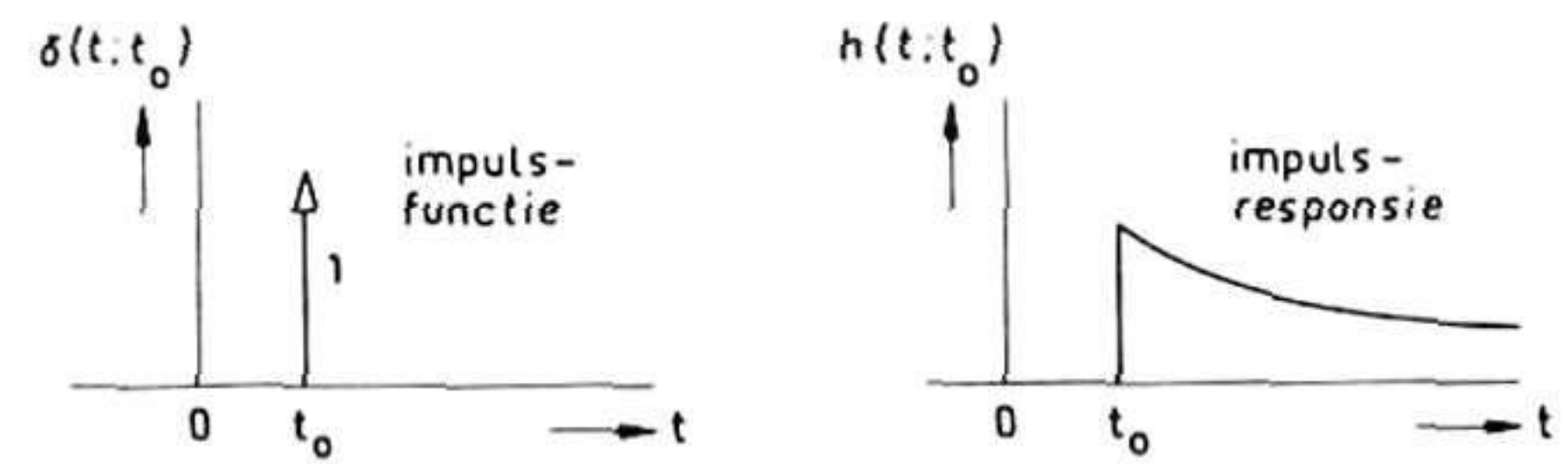
Van de vele hierboven genoemde indelingen is die in lineaire en niet-lineaire wel de meest belangrijke. Voor de lineaire systemen is een gesloten analytische beschrijving te geven; voor de niet-lineaire in het algemeen niet, dit zal van geval tot geval verschillen. Het is daarom wenselijk eerst nader in te gaan op de klasse van de lineaire systemen.

1.4.2. Lineaire systemen

De lineariteitseigenschappen [52] en [53] vormen het zogenaamde *superpositiebeginsel*: de interpretatie hiervan is uitermate belangrijk. Het superpositiebeginsel zegt immers dat de responsie van een lineaire combinatie van deelsignalen gelijk is aan dezelfde lineaire combinatie van de responsies van de deelsignalen (figuur 7); dit geldt zowel ten aanzien van het ingangssignaal, als ten aanzien van de begincondities. Het superpositiebeginsel toont aan dat elk lineair systeem gekenmerkt kan worden door slechts één functie: de *impulsfunctie* $\delta(t-t_0)$ welke resulteert in de *impulsresponsie* $h(t, t_0)$.

1.4.2.1. Beschrijving door middel van de impulsresponsie

De systeemresponsie kan in principe worden bepaald door aan een systeem een impuls aan te bieden; in de praktijk zal dit niet zonder meer mogelijk zijn daar een impuls oneindig smal en oneindig hoog is. Theoretisch leidt het echter tot een goede beschrijvingswijze in het tijdsdomein (figuur 10). Uit de definitie van causale systemen volgt dat de impulsresponsie $h(t; t_0) = 0$ voor $t < t_0$; is het systeem tevens



Figuur 10. De impulsresponsie.

constant dan zal gelden dat $h(t; t_0) = h(t - t_0)$.

Een belangrijke eigenschap van de impulsfunctie luidt:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau, \quad [56]$$

of met andere woorden het ingangssignaal $u(t)$ kan worden gedacht te zijn samengesteld uit een sommatie van impulsfuncties met oppervlakte $u(\tau) d\tau$. Voor een lineair constant systeem moet dan op grond van het superpositiebeginsel gelden dat:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad [57]$$

Beperkt men zich tot causale systemen dan wordt dit:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^t u(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} u(t - \tau) h(\tau) d\tau = \\
&= u(t) * h(t).
\end{aligned}
\quad [58]$$

Een vergelijking zoals vergelijking [58] wordt een *convolutie-integraal* genoemd. Volgens vergelijking [22] gaat deze integraalvergelijking na transformatie over in een produkt van $U(s)$ en $H(s)$. Met behulp van de vergelijkingen [57] en [58] is nu voor elk willekeurig deterministisch ingangssignaal een systeem beschrijving op basis van de impulsresponsie te bepalen; immers uit meting van $y(t)$ en $u(t)$ is door het oplossen van de integraalvergelijking de impulsresponsie te bepalen.

Voor het geval dat de ingangssignalen stochastisch zijn kunnen bovenstaande betrekkingen niet zonder meer gebruikt worden; immers de functie $\bar{u}(t; \xi)$ is niet als functie van de tijd bekend. Echter uitgaande van vergelijking [57] geldt voor een lineair constant systeem met ingangssignaal $\bar{u}(t; \xi)$ dat:

$$\bar{y}(t; \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(t - \theta; \xi) h(\theta) d\theta. \quad [59]$$

Door vermenigvuldiging van beide leden van vergelijking [59] met $\bar{u}(t - \tau; \xi)$ en door vervolgens de ver-

wachtingswaarde hiervan op te stellen, volgt in overeenstemming met de definitie van de gemiddelde produktfunctie [30] dat:

$$R_{\bar{u}\bar{y}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\bar{u}\bar{u}}(\tau-\theta)h(\theta)d\theta = \\ = R_{\bar{u}\bar{u}}(\tau)*h(\tau), \quad [60]$$

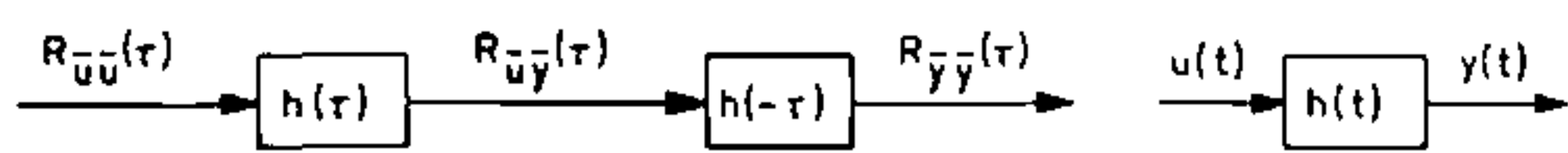
waarin de functie $R_{\bar{u}\bar{y}}(\tau)$ de *gemiddelde kruisproduktfunctie* wordt genoemd:

$$R_{\bar{u}\bar{y}}(\tau) = E\{\bar{u}(t;\xi)\bar{y}(t+\tau;\xi)\} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u y f_{\bar{u}\bar{y}}(u,y;\tau) du dy. \quad [61]$$

De functie $R_{\bar{u}\bar{y}}(\tau)$ geeft derhalve het verband weer tussen de stochastische signalen $\bar{u}(t;\xi)$ en $\bar{y}(t+\tau;\xi)$ als functie van het tijdsverschil τ .

Op dezelfde wijze valt af te leiden dat $R_{\bar{y}\bar{y}} = R_{\bar{y}\bar{u}}(\tau)*h(\tau)$, zodat tenslotte volgt:

$$R_{\bar{y}\bar{y}}(\tau) = R_{\bar{u}\bar{u}}(\tau)*h(-\tau)*h(\tau). \quad [62]$$



Figuur 11. Systeembeschrijving met behulp van de impulsresponsie voor deterministische en stochastische signalen.

1.4.2.2. Beschrijving door middel van de differentiaalvergelijking

Het bepalen van de systeemresponsie $y(t)$ kan eveneens geschieden door het oplossen van de differentiaalvergelijking die het verband tussen ingangssignaal en uitgangssignaal weergeeft. Lineaire systemen worden door een differentiaalvergelijking van de volgende algemene vorm weergegeven:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + \\ + a_0 y(t) = f(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + \\ + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t). \quad [63]$$

Bij tijdsafhankelijke systemen zijn de coëfficiënten a_i ($i=0,1,\dots,n$) en b_j ($j=0,1,\dots,m$) functies van de tijd; bij constante systemen zijn deze constant. Voor fysische systemen zal in het algemeen $m \leq n$ zijn; n

wordt de *orde* van het systeem genoemd. De oplossing van de differentiaalvergelijking levert de *totale responsie*; voor $f(t)=0$ wordt de *vrije responsie* verkregen en voor het geval dat de begincondities nul zijn volgt de *gedwongen responsie*. De meest universele methode om de differentiaalvergelijking op te lossen maakt gebruik van de laplacetransformatie. De berekening verloopt kort samengevat als volgt:

– Stel de functie $f(t)=0$, en bepaal de laplacegetransformeerde van vergelijking [63]; hieruit volgt de laplacegetransformeerde $Y(s)$, die na terugtransformatie de gevraagde vrije responsie van het systeem levert.

– Voor $f(t) \neq 0$, doch met begincondities gelijk aan nul volgt na laplacetransformatie van vergelijking [63] dat:

$$[a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0] Y(s) = \\ = [b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0] U(s). \quad [64]$$

Uit [64] is nu de responsie $y(t)$ door terugtransformatie van $Y(s)$ te berekenen.

– De totale responsie is door optelling van de vrije en de gedwongen responsie te verkrijgen.

Veelal wordt de responsie ook op andere wijze gesplitst, namelijk in het *inschakelverschijnsel* en in de *stationaire oplossing*. Onder het *inschakelverschijnsel* wordt verstaan het deel van de totale responsie dat naar nul gaat voor $t \rightarrow \infty$; met de *stationaire oplossing* wordt bedoeld dat deel dat niet naar nul gaat voor $t \rightarrow \infty$.

Tenslotte wordt ingegaan op het verband tussen de systeembeschrijving met behulp van de impulsresponsie en die welke volgt uit het oplossen van de differentiaalvergelijking. Uit de vergelijking [58] volgt voor een causaal lineair constant systeem met ingangssignaal $u(t)$ dat

$$y(t) = \int_0^{\infty} u(t-\tau)h(\tau) d\tau, \quad [65]$$

zodat na laplacetransformatie geldt, gebruikmakend van vergelijking [22]:

$$Y(s) = H(s) U(s), \quad [66]$$

waarin $H(s)$ de laplacegetransformeerde van $h(t)$ is. De functie $H(s)$ wordt de *overbrengingsverhouding* genoemd. Uit vergelijking [64] volgt nu met betrekking tot de gedwongen responsie, dat indien de vergelijkingen [64] en [66] identiek zijn:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad [67]$$

waarin de polynoom $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$ de *karakteristieke polynoom* wordt genoemd. Aangetoond kan worden dat de vergelijking [67] inderdaad juist is, zodat voor de overbrengingsverhouding dus geldt:

$$H(s) = L\{h(t)\} = \int_0^\infty h(t) e^{-st} dt. \quad [68]$$

De gevolgde gedachtengang kan ook gebaseerd worden op de fouriertransformatie, zij het dat dan de begincondities buiten beschouwing worden gelaten. Meestal wordt de fouriertransformatie gebruikt voor ingangssignalen die reeds ver in het verleden begonnen zijn ($t \rightarrow -\infty$). Er volgt dan:

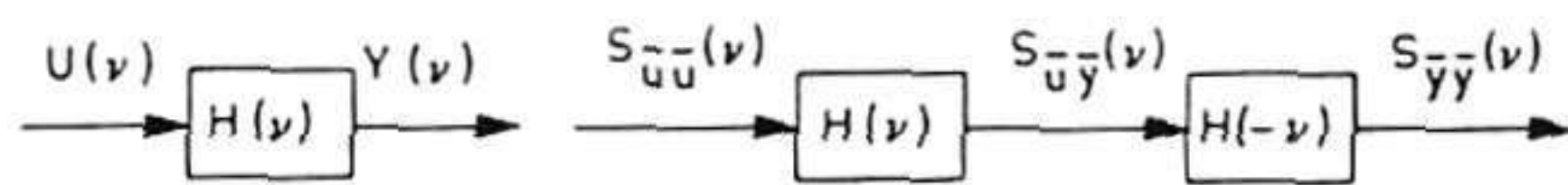
$$Y(\nu) = H(\nu) U(\nu), \quad [69]$$

met:

$$H(\nu) = F\{h(t)\} = \int_{-\infty}^\infty h(t) e^{-i2\pi\nu t} dt. \quad [70]$$

1.4.2.3. Beschrijving door middel van de overbrengingsverhouding

Met de formules [66] en [69] is in feite de beschrijving van een lineair constant causaal systeem met deterministische ingangssignalen gegeven (figuur 12); deze beschrijving is in het frequentiedomein. De beschrijving van stochastische signalen is naar analogie



Figuur 12. Beschrijvingswijze van lineaire causale constante systemen met behulp van overbrengingsverhoudingen.

van vergelijking [22] direct door fouriertransformatie van de vergelijkingen [60] en [62] af te leiden; er volgt:

$$S_{u\bar{y}}(\nu) = H(\nu) S_{u\bar{u}}(\nu), \quad [71]$$

$$S_{\bar{y}\bar{y}}(\nu) = S_{u\bar{y}}(\nu) H(-\nu) = S_{u\bar{u}}(\nu) H(\nu) H(-\nu) = |H(\nu)|^2 S_{u\bar{u}}(\nu). \quad [72]$$

Men dient zich hierbij te realiseren dat de vergelijking [71] zowel fase- als amplitude-informatie van $H(\nu)$ geeft, terwijl uit de vergelijking [72] slechts amplitude-informatie verkregen wordt.

De overbrengingsverhouding $H(\nu)$ kan ook worden opgevat als de frequentieresponsie, verkregen door de responsie op een sinusvormig ingangssignaal $u(t) = a \cos 2\pi\nu t$. Afgeleid kan worden dat uit het quotiënt van de amplitudes van het ingangssignaal en het door het lineaire constante systeem gegenereerde sinusvormige uitgangssignaal de $|H(\nu)|$ wordt verkregen, terwijl het faseverschil tussen ingangs- en uitgangssignaal gelijk is aan het arg $H(\nu)$.

1.4.2.4. Stabiliteit

De stabiliteit van een systeem wordt bepaald door de responsie op de ingangssignalen. Uitgaande van de impulsresponsie kan deze als volgt gedefinieerd worden: Een systeem is *stabiel* als zijn impulsresponsie naar nul gaat voor $t \rightarrow \infty$. Uitgaande van

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}\right\}, \quad [73]$$

volgt dat de wortels van de *karakteristieke vergelijking*

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = a_n (s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n) = 0 \quad [74]$$

een *negatief reëel deel* moeten bezitten: $R_e(s_i) = \lambda_i < 0$ voor $i=1, 2, \dots, n$.

1.4.2.5. Samengestelde systemen

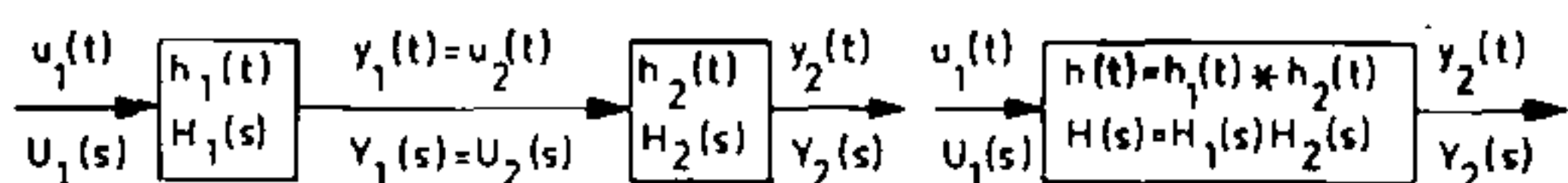
Reeds in de inleiding is naar voren gekomen dat de keuze van de systeemgrens arbitrair is. Vaak vormen een aantal subsystemen tezamen een nieuw systeem. Met behulp van een *blokdigram* is veelal een overzichtelijke structuur van dergelijke *samengestelde systemen* te verkrijgen. Een aantal verschillende structuren is hierbij te onderkennen.

– *Cascadeschakeling van subsystemen*: bij de cascade- of serieschakeling vormt het uitgangssignaal van het eerste subsysteem het ingangssignaal van het tweede (figuur 13). Eenvoudig valt af te leiden dat voor het samengestelde systeem $h(t)$ geldt:

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t), \quad [75]$$

$$H(s) = H_1(s) H_2(s). \quad [76]$$

– *Parallelschakeling van subsystemen*: bij de parallelschakeling van subsystemen wordt een ingangssig-

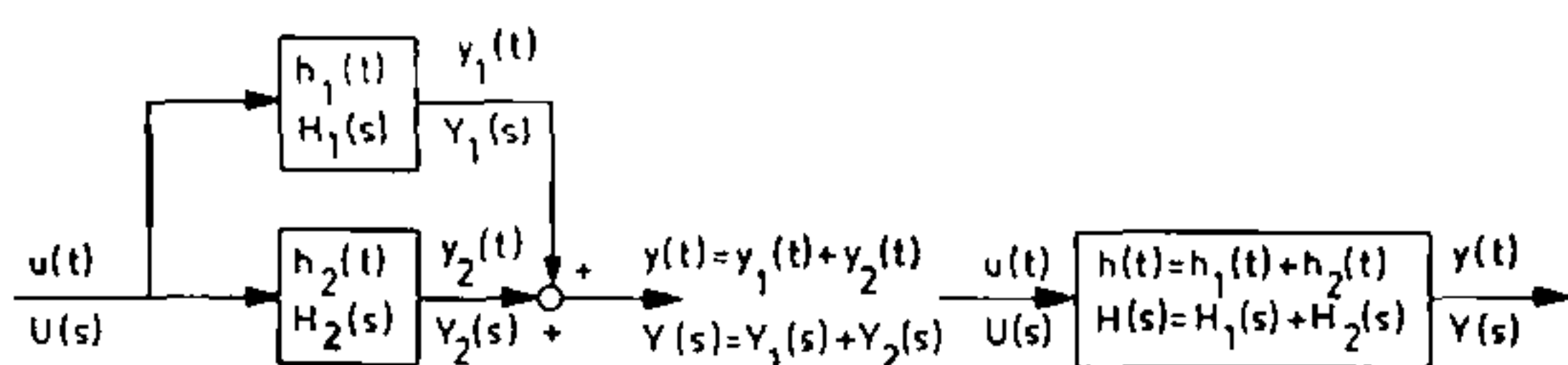


Figuur 13. Cascadeschakeling van subsystemen.

naal aan beide systemen tegelijk toegevoerd, waarna de responsies bij elkaar worden opgeteld (figuur 14). Ook hier valt eenvoudig af te leiden dat:

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t), \quad [77]$$

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s). \quad [78]$$

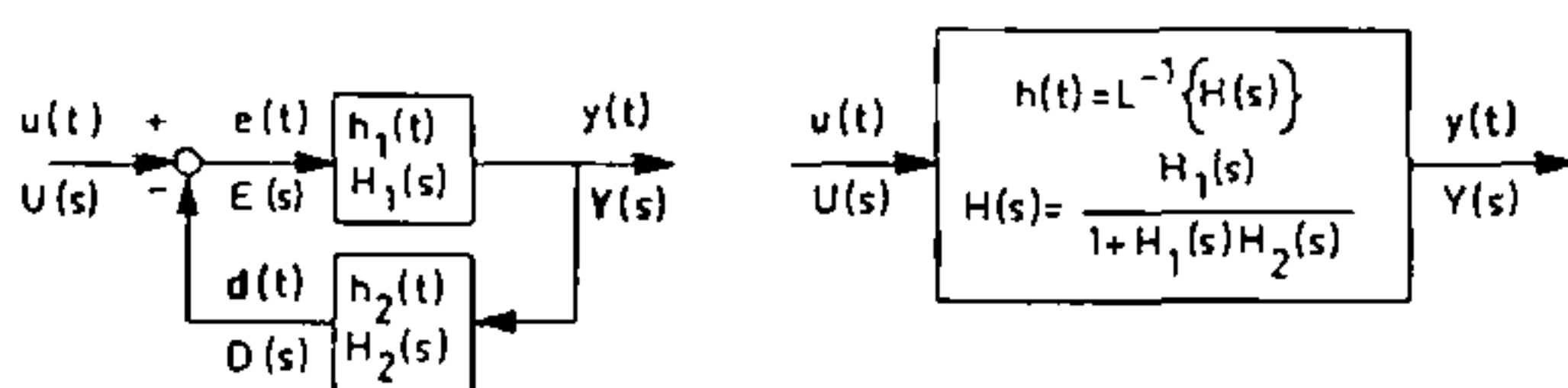


Figuur 14. Parallelschakeling van subsystemen.

– *Teruggekoppelde systemen*: bij de teruggekoppelde systemen wordt het uitgangssignaal $y_1(t)$ van het systeem $H_1(s)$ in de zogenaamde *rechtdoorgaande baan* teruggevoerd via de *terugkoppelbaan* naar de ingang (figuur 15). Zonder veel rekenwerk kan nu worden afgeleid dat:

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}, \quad [79]$$

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} \right\}. \quad [80]$$



Figuur 15. Een tegengekoppeld systeem.

1.4.3. Niet-lineaire systemen

Zoals reeds bij het onderscheid tussen lineaire en niet-lineaire systemen is vermeld, is een *niet-lineair systeem* een systeem dat *niet lineair* is, dus dat niet aan het superpositiebeginsel voldoet. Deze definitie is zeer armzalig; immers deze definitie sluit de mogelijkheid dat een systeem een bepaalde eigenschap,

zij het een zeer belangrijke, bezit uit, zonder daarmee ook maar één enkele eigenschap vast te leggen. Het gedrag van niet-lineaire systemen wordt beschreven door niet-lineaire algebraïsche, differentiaal- of differentievergelijkingen. Zelden kunnen deze analytisch worden opgelost; een algemeen geldende oplossingsmethodiek is dan ook niet te verwachten. In de systeemtheorie is men echter vaak het meest geïnteresseerd in het gedrag van een systeem in één bepaald *werkpunt*, zodat door *linearisatie rond een werkpunt* een beschrijving gevonden kan worden: er volgt een lineaire beschrijving van het niet-lineaire systeem in een zeker gebied rond het werkpunt. Hiermee is de weg geopend om de in de voorgaande paragrafen ontwikkelde theorie van de lineaire systemen zinvol toe te passen.

Bij een nadere bestudering van het gedrag van niet-lineaire systemen valt een aantal punten direct op:

- Allereerst blijkt dat het gedrag van het systeem in sterke mate afhangt van het ingangssignaal.
- Verder blijkt dat het systeem de eigenschap heeft hogere harmonischen te genereren, soms blijkt dat de toegevoerde grondharmonische zelfs niet meer in het uitgangssignaal voorkomt.

1.4.3.1. Linearisatie van constante statische systemen

Linearisatie van een niet-lineair systeem leidt tot een lineaire beschrijving rond een werkpunt van dit niet-lineaire systeem. Stel dat gegeven is het constante statische systeem

$$y(t) = g\{u(t)\}, \quad [81]$$

waarin de functie $g\{u(t)\}$ een niet-lineaire, continue en differentieerbare functie voorstelt, dan geldt rond het werkpunt $g\{\eta_u\}$ volgens de Taylorreeks:

$$y(t) = g\{\eta_u\} + \left. \frac{dg}{du} \right|_{\eta_u} [u(t) - \eta_u] + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2g}{du^2} \right|_{\eta_u} [u(t) - \eta_u]^2 + \dots, \quad [82]$$

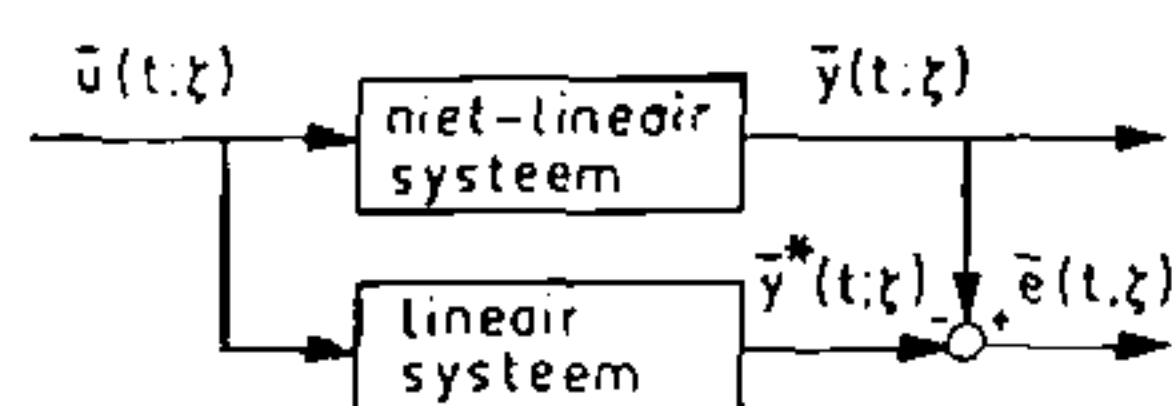
zodat na verwaarlozing van de hogere machten geldt:

$$y(t) = g\{\eta_u\} + \left. \frac{dg}{du} \right|_{\eta_u} [u(t) - \eta_u] \quad [83]$$

Met andere woorden tussen de kleine variaties rond het werkpunt $g\{\eta_u\}$ bestaat de relatie:

$$k(\eta_u) = \left. \frac{dg}{du} \right|_{\eta_u}. \quad [84]$$

Opgemerkt moet worden dat de *versterkingsfactor* $k(\eta_u)$ een functie is van het werkpunt $g(\eta_u)$ van de niet-lineariteit, of, betrokken op het ingangssignaal, van de gemiddelde waarde η_u van $u(t)$. Deze linearisatietechniek is echter alleen zinvol als de variaties in het ingangssignaal $u(t)$ rondom zijn gemiddelde η_u niet te groot zijn, zoals in tegengekoppelde of gesloten systemen. Wordt echter een niet-tegengekoppeld of open systeem beschouwd dan zullen de variaties rond η_u vaak te groot zijn om een dergelijke vereenvoudiging te mogen doorvoeren. In dat geval kan het zinvol zijn van de methode van de *statistische linearisatie* of de *methode van Booton* gebruik te maken. Deze methode berust op de volgende gedachtengang. Veronderstel dat het ingangssignaal $\bar{u}(t;\xi)$ een gemiddelde waarde $\eta_u=0$ bezit, en dat het niet-lineaire systeem vervangen kan worden door een equivalente versterkingsfactor $k_e(0, \sigma_u)$, en dus door een lineair constant systeem, dan zal door minimalisatie van het verschil tussen het uitgangssignaal $\bar{y}(t;\xi)=g\{\bar{u}(t;\xi)\}$ van het niet-lineaire statische systeem en het uitgangssignaal $\bar{y}^*(t;\xi)=k_e \bar{u}(t;\xi)$ van het vervangende lineaire systeem volgens een kwadratisch criterium de best mogelijke equivalente versterkingsfactor worden verkregen (figuur 16). Er valt aan te tonen dat door berekening van:



Figuur 16. Statistische linearisatie van een constant statisch niet-lineair systeem.

$$\frac{\partial}{\partial k_e} E\{[g\{\bar{u}(t;\xi)\} - k_e \bar{u}(t;\xi)]^2\} = 0 \quad [85]$$

de volgende eenvoudige betrekking voor $k_e(0, \sigma_u)$ geldt:

$$k_e(0, \sigma_u) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} u g(u) f_u(u) du}{\int_{-\infty}^{\infty} u^2 f_u(u) du} = \frac{1}{\sigma_u^2} \int_{-\infty}^{\infty} u g(u) f_u(u) du. \quad [86]$$

Een aantal opmerkingen moet hier gemaakt worden. – Uit de vergelijking [86] blijkt dat de verkregen versterkingsfactor $k_e(0, \sigma_u)$ een functie is van de va-

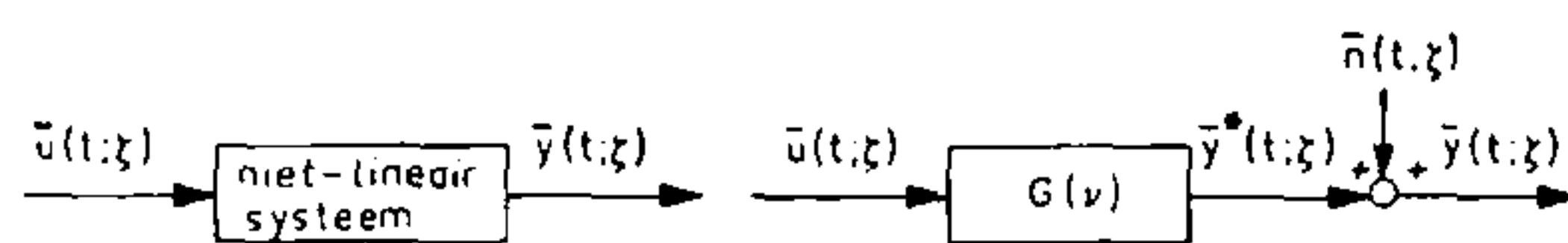
riantie σ_u ; in feite moet zelfs de verdelingsdichtheidsfunctie $f_u(u)$ bekend zijn bij de berekening van $k_e(0, \sigma_u)$. De hier vermelde methode kan, zij het dat de resultaten aanmerkelijk ingewikkelder worden, ook toegepast worden voor ingangssignalen $\bar{u}(t;\xi)$ waarvan $\eta_u \neq 0$.

– Gezien het feit dat het lineaire vervangende systeem een versterkingsfactor is, kan deze methode alleen voor niet-lineaire constante statische systemen zinvol worden toegepast.

– De hier gevolgde methodiek ter verkrijging van de optimale versterkingsfactor vertoont grote overeenkomst met die welke gevolgd is bij het ontbinden van signalen in deelsignalen; men vergelijk daartoe de figuren 6 en 16.

1.4.3.2. Beschrijvende functiemethode

Voor de beschrijving van niet-lineaire constante dynamische systemen wordt gebruik gemaakt van de *beschrijvende functiemethode*. Deze berust op het feit dat het te beschrijven niet-lineaire systeem wordt beschreven door een lineair dynamisch systeem, gekarakteriseerd door een versterkingsfactor $|G(\nu)|$ en een fase-draaiing $\arg G(\nu)$. Wanneer aan een niet-lineair systeem een ingangssignaal $u(t)=A \cos 2\pi \nu t$ wordt aangeboden kan het uitgangssignaal met behulp van de fourierreeks [6] worden gesplitst in sinusvormige deelsignalen. Uit een vergelijking van het ingangssignaal met de grondharmonische, de eerste term van de fourierreeks van het uitgangssignaal, kan nu een overbrengingsverhouding worden gedefinieerd, de *beschrijvende functie*. Ook deze methodiek geeft een beschrijving rond een bepaald werkpunt, en moet gezien worden als een linearisatiemethode. Van belang is om op te merken dat er geen lineair verband tussen de hogere harmonischen, de verdere termen van de fourierreeksontwikkeling, van het uitgangssignaal $y(t)$ en het ingangssignaal $u(t)$ bestaat. De hierboven geschetste methode is ook toepasbaar voor stochastische signalen; het te beschrijven systeem wordt gedacht te worden beschreven door een lineair systeem waar aan de uitgang een signaal $\bar{n}(t;\xi)$, de *restruis*, wordt toegevoegd (figuur 17). De restruis is dus het verschil tussen de uitgangssig-



Figuur 17. De beschrijvende functie: een lineaire beschrijving van een niet-lineair constant dynamisch systeem.

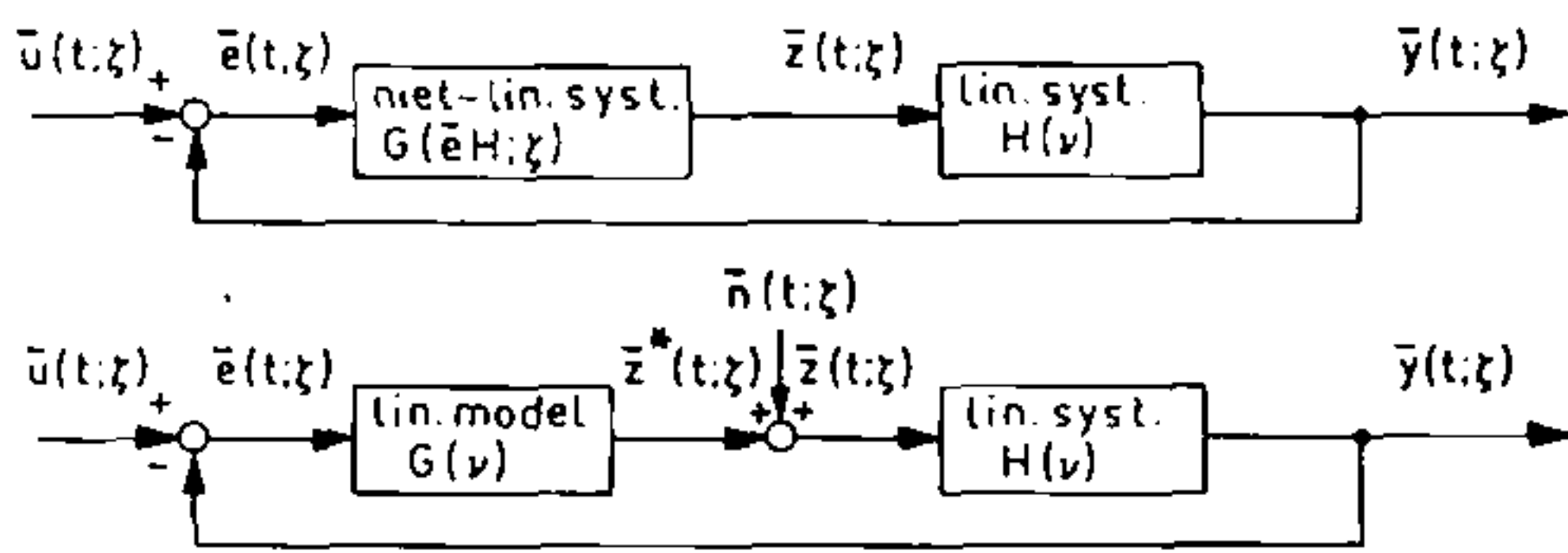
nal en $\bar{y}(t;\xi)$ en $\bar{y}^*(t;\xi)$ van respectievelijk het niet-lineaire systeem en het vervangende lineaire systeem. De optimale dynamische versterkingsfactor wordt verkregen door de variantie van de restruis te minimaliseren naar de parameters van de overbrengingsverhouding $G(\nu)$. Aangetoond kan worden dat minimalisatie van de variantie σ_n^2 betekent dat er tussen de restruis $\bar{n}(t;\xi)$ en hetingangssignaal $\bar{u}(t;\xi)$ geen lineaire relatie bestaat, en dus dat $R_{\bar{u}\bar{n}}(\tau)=0$ voor alle τ . Er kan worden afgeleid dat:

$$S_{\bar{u}\bar{y}}(\nu) = S_{\bar{u}\bar{y}}^*(\nu) = G(\nu)S_{\bar{u}\bar{u}}(\nu), \quad [87]$$

$$S_{\bar{y}\bar{y}}(\nu) = |G(\nu)|^2 S_{\bar{u}\bar{u}}(\nu) + S_{\bar{n}\bar{n}}(\nu). \quad [88]$$

Met behulp van vergelijking [87] is de beschrijvende functie $G(\nu)$ te bepalen; hieruit kan door substitutie van $|G(\nu)|$ in vergelijking [88] het spectrum $S_{\bar{n}\bar{n}}(\nu)$ van de restruis worden bepaald.

De door de formules [87] en [88] gegeven methode kan alleen toegepast worden indien het niet-lineaire systeem in een niet-teruggekoppeld systeem is opgenomen. Bestaat er echter wel een terugkoppelbaan (figuur 18) dan kan deze methodiek niet zonder



Figuur 18. De beschrijvende functiemethode toegepast in een gesloten systeem.

meer worden toegepast; immers het signaal $\bar{n}(t;\xi)$ is door de terugkoppeling altijd voor een deel lineair afhankelijk van $\bar{e}(t;\xi)$, en dus zal $R_{\bar{e}\bar{n}}(\tau) \neq 0$ zijn voor alle τ . Eenvoudig valt af te leiden dat nu $H(\nu)$ als volgt kan worden berekend:

– *Indirecte methode:*

$$S_{\bar{u}\bar{y}}(\nu) = G_{tot}(\nu) S_{\bar{u}\bar{u}}(\nu),$$

$$\text{met } G_{tot}(\nu) = \frac{G(\nu)H(\nu)}{1+G(\nu)H(\nu)}. \quad [89]$$

– *Directe methode:*

$$G(\nu) = S_{\bar{u}\bar{z}}(\nu)/S_{\bar{u}\bar{e}}(\nu). \quad [90]$$

De eerste methode kan alleen worden toegepast in-

dien het lineaire systeem $H(\nu)$ bekend is; in het algemeen leidt de directe methode sneller tot resultaten.

De beschrijvende functiemethode is van groot belang bij de mathematische beschrijving van het regelgedrag van de mens in stuur- en regeltaken.

1.4.4. Toestandsbeschrijving

Bij de indeling van systemen in scalaire en multivariabele systemen is reeds gewezen op de toestandsbeschrijving van multivariabele systemen. Deze beschrijvingswijze heeft de laatste decennia een zeer grote opgang gemaakt, enerzijds omdat het conceptueel eenvoudig was zeer gecompliceerde systemen overzichtelijk te schrijven, anderzijds omdat deze beschrijvingswijze zich zeer goed leent voor verwerking met digitale rekenmachines. De gedachtengang is terug te voeren tot het feit dat elk dynamisch systeem kan worden beschreven door een stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen.

Wanneer voor een gegeven systeem hetingangssignaal $u(t)$ bekend is over het interval $[-\infty, t]$ dan kan het uitgangssignaal $y(t)$ berekend worden; is $u(t)$ echter bekend over het interval $[t_0, t]$ dan is voor de berekening van $y(t)$ (met uitzondering van de constante statische systemen) ook de beginvoorwaarde of toestand $y(t_0)$ nodig. De toestand van een systeem kan nu als volgt worden gedefinieerd:

De toestand van een systeem op een zeker tijdstip t_0 is een verzameling getallen die tezamen met het ingangssignaal op het interval $[t_0, t]$ het uitgangssignaal op het tijdstip t eenduidig vastlegt.

Uit deze definitie volgt een belangrijke relatie: de uitgangsvergelijking van het systeem:

$$\underline{y}(t) = \underline{f}\{\underline{x}(t_0), \underline{u}(t:t_0, t)\}; t > t_0; \quad [91]$$

hierin stelt de grootheid $\underline{y}(t)$ de uitgangsvector voor, $\underline{u}(t:t_0, t)$ de ingangsvector over het interval $[t_0, t]$ en $\underline{x}(t_0)$ de toestandsvector. De toestandsvector is hierin gedefinieerd op het tijdstip t_0 ; vanzelfsprekend had deze bijvoorbeeld ook ten tijde t_1 gedefinieerd kunnen worden. Aangetoond kan nu worden dat voor $t_1 > t_0$ de toestand $\underline{x}(t_1)$ volledig bepaald wordt door $\underline{x}(t_0)$ en $\underline{u}(t:t_0, t_1)$. Dit leidt tot de *toestandsvergelijking* [92]:

$$\underline{x}(t) = \underline{g}\{\underline{x}(t_0), \underline{u}(t:t_0, t)\}; t > t_0. \quad [92]$$

De vergelijkingen [91] en [92] beschrijven met uitzondering van de verdeelde systemen alle eerder genoemde klassen systemen.

Binnen het kader van dit Handboek is het onmogelijk een algemene behandeling van de toestandsbeschrijving te geven; zij zal daartoe beperkt worden tot de differentiële systemen, dat zijn die systemen waarvoor de vergelijkingen [91] en [92] geschreven kunnen worden in de vorm van:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{g}\{\underline{x}(t), \underline{u}(t), t\}, \quad [93]$$

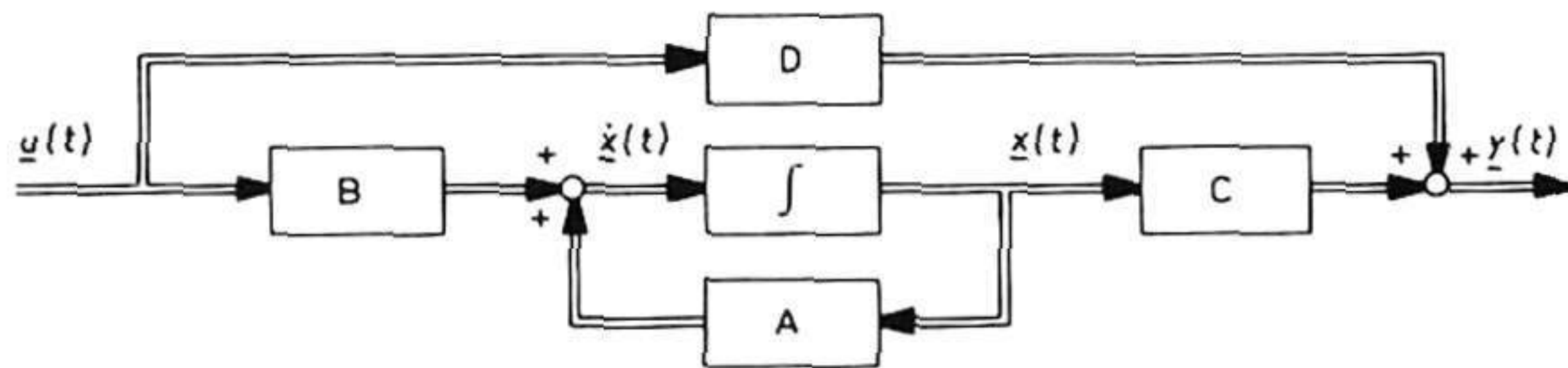
$$\underline{y}(t) = \underline{f}\{\underline{x}(t), \underline{u}(t), t\}. \quad [94]$$

De *systeemvergelijkingen* [93] en [94] bezitten een zeer eenvoudige structuur wanneer deze worden opgesteld voor lineaire systemen, er volgt

$$\dot{\underline{x}}(t) = A(t)\underline{x}(t) + B(t)\underline{u}(t) \quad [95]$$

$$\underline{y}(t) = C(t)\underline{x}(t) + D(t)\underline{u}(t) \quad [96]$$

waarin $A(t)$ de *systeemmatrix*, $B(t)$ de *ingangsmatrix*, $C(t)$ de *uitgangsmatrix* en $D(t)$ de *doorverbindingsmatrix* voorstellen. Voor het geval dat een lineair



Figuur 19. Toestandsbeschrijving van een lineair constant systeem.

constant systeem wordt bekeken kunnen de vergelijkingen [95] en [96] nog verder worden vereenvoudigd, namelijk tot:

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t), \quad [97]$$

$$\underline{y}(t) = C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t). \quad [98]$$

De betekenis van de matrices A, B, C, en D kan het best aan de hand van figuur 19 worden nagegaan.

– De matrix A bevindt zich in de tegenkoppelbaan, en voert dus een operatie uit op de teruggekoppelde toestandsgrootte $\underline{x}(t)$ naar de integratoren. De systeemmatrix A bepaalt in feite het dynamische gedrag van het systeem.

– De matrix B bepaalt in welke mate en op welke wijze hetingangssignaal $\underline{u}(t)$ kan inwerken op het teruggekoppeld systeem; de matrix geeft in samenhang met de systeemmatrix A aan of het systeem regelbaar is of niet. Onder een *volledig regelbaar* systeem wordt hierbij verstaan een situatie waarbij het

systeem vanuit een willekeurige begintoestand $\underline{x}(t_0)$ naar een of andere willekeurige eindtoestand $\underline{x}(t_e)$ kan worden gestuurd door het aanbieden van een zeker ingangssignaal $\underline{u}(t; t_0, t_e)$, waarbij het interval $[t_0, t_e]$ eindig is met $t_e > t_0$.

– Als tegenhanger van het begrip regelbaarheid kent men het begrip observeerbaarheid, bepaald door de structuur van de matrix C in relatie tot die van de systeemmatrix A. Een systeem wordt *volledig observeerbaar* genoemd indien uit de toestand $\underline{x}(t_0)$ en het uitgangssignaal $\underline{y}(t; t_0, t_e)$ op het eindige interval $[t_0, t_e]$ de toestand $\underline{x}(t_e)$ éénduidig is vast te leggen ($t_0 < t_e$).

– Tenslotte geeft de doorverbindingsmatrix D aan in welke mate en op welke wijze het ingangssignaal $\underline{u}(t)$ direct op het uitgangssignaal $\underline{y}(t)$ ingrijpt, zonder daarbij de tegengekoppelde integratoren te passeren.

De begrippen regelbaarheid en observeerbaarheid zullen nader worden gebruikt in de paragraaf over automaten en grammatica's.

Zonder in te gaan op de bewijsvoering kan nu worden afgeleid dat de oplossingen van de differentiaalvergelijkingen [97] en [98] met beginvoorwaarde $\underline{x}(t_0)$ luiden:

$$\underline{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B \underline{u}(\tau) d\tau \quad [99]$$

$$\underline{y}(t) = C e^{A(t-t_0)} \underline{x}(t_0) + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B \underline{u}(\tau) d\tau + D \underline{u}(t) \quad [100]$$

waarin $e^{A(t)}$ de *overgangsmatrix* wordt genoemd. De formules [99] en [100] geven de responsie $\underline{y}(t)$ van het systeem op een ingangssignaal $\underline{u}(t)$ in het tijdsdomein.

Evenals bij de scalaire systemen kan ook hier weer een beschrijving in het frequentiedomein worden gegeven. Door laplacetransformatie van de vergelijking [97] volgt:

$$s\underline{X}(s) - \underline{x}(t_0) = A\underline{X}(s) + B\underline{U}(s), \quad [101]$$

en dus:

$$\underline{X}(s) = (sI - A)^{-1} \underline{x}(t_0) + (sI - A)^{-1} B \underline{U}(s). \quad [102]$$

De matrix $(sI - A)^{-1} B$ wordt de *overdrachtsmatrix* van $\underline{U}(s)$ naar $\underline{X}(s)$ genoemd. Transformatie van de

vergelijking [98] en substitutie hiervan in vergelijking [102] levert:

$$\underline{Y}(s) = C(sI-A)^{-1}\underline{x}(t_0) + [C(sI-A)^{-1}B+D]\underline{U}(s). \quad [103]$$

De matrix $C(sI-A)^{-1}B+D$ wordt de *overdrachtsmatrix van $\underline{U}(s)$ naar $\underline{Y}(s)$* genoemd; deze kan vergeleken worden met de overbrengingsverhouding $H(s)$ die bij de scalaire lineaire constante systemen reeds naar voren gekomen is in paragraaf 1.4.2.3.

Bij de modernere beschrijvingen van het regelgedrag van de mens bij stuur- en regeltaken wordt veelvuldig van deze toestandsbeschrijving gebruik gemaakt.

1.5. Modellen en parameterschatten

De systeemtheorie heeft onder andere tot doel om realistische systemen te modelleren, dat wil zeggen door een mathematisch model de wetmatigheden vast te leggen, en wel zo, dat op grond hiervan het gedrag van het werkelijke systeem kan worden voorspeld onder zeer uiteenlopende omstandigheden. In het voorgaande is er vrijwel steeds van uitgegaan dat van het te onderzoeken systeem weinig of geen a priori informatie aanwezig is. In dergelijke gevallen kan door de bepaling van impulsresponsies, overbrengingsverhoudingen en gemiddelde produktfuncties vaak zeer doeltreffend een systeembeschrijving gevonden worden. Veelal is het echter op grond van reeds verkregen kennis van het te onderzoeken systeem mogelijk om van het model de *structuur* reeds van te voren op te stellen, terwijl de waarden van de *parameters* in het model met de reeds bekende structuur dan later bepaald dienen te worden.

De keuze van de structuur van het model is van groot belang; deze keuze wordt onder andere beïnvloed door de volgende factoren:

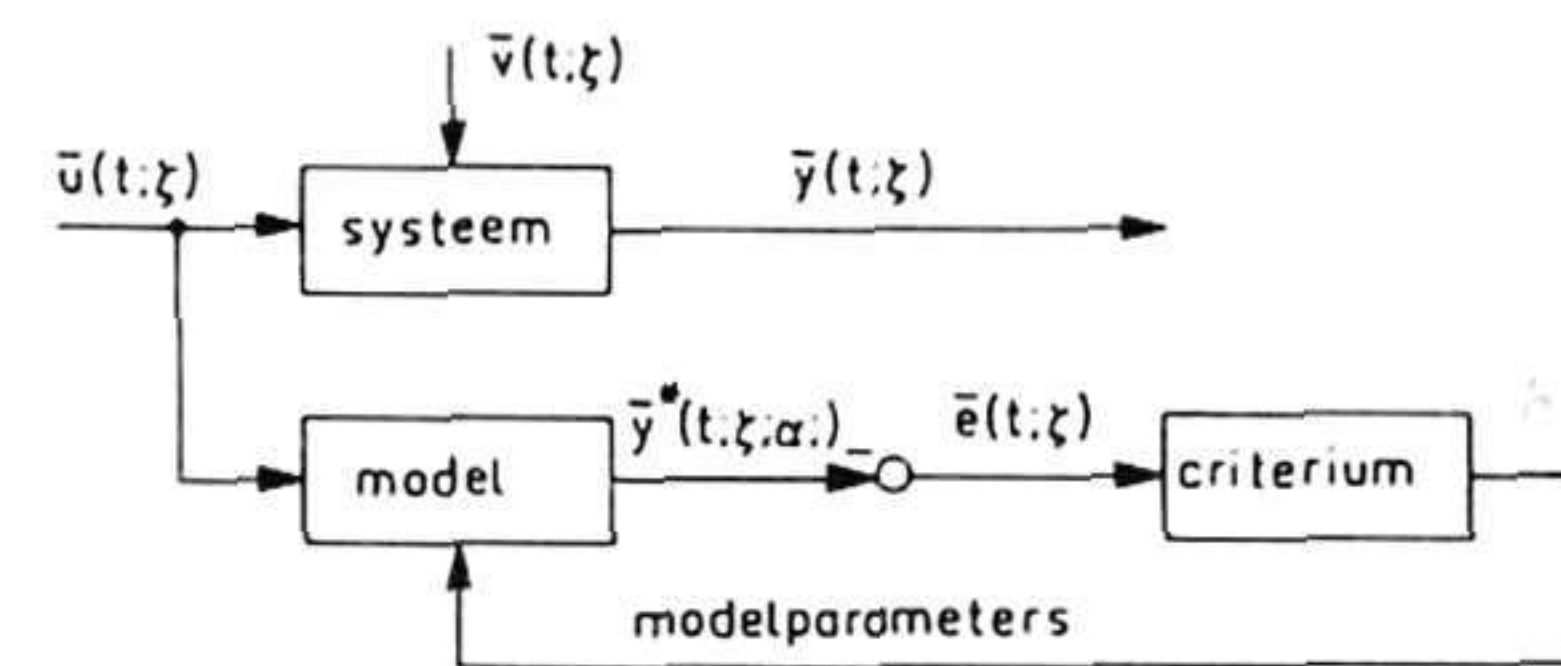
- Het doel waarvoor het model wordt opgesteld.
- De inzichten van de onderzoeker of ontwerper.
- De informatie die reeds bekend is over het te onderzoeken systeem.
- De vereiste nauwkeurigheid van het model.
- De observeerbaarheid van het te onderzoeken systeem.

De bepaling van de nog onbekende parameters geschiedt in wezen altijd volgens hetzelfde patroon, zij het dat de uitwerking totaal verschillend kan zijn (figuur 20). Van het te onderzoeken systeem wordt een model opgesteld; de structuur wordt gekozen

en de parameters α_i moeten bepaald worden. Het door het ingangssignaal $\bar{u}(t;\xi)$ gegenereerde uitgangssignaal $\bar{y}^*(t;\xi;\alpha_i)$ wordt vergeleken met het uitgangssignaal $\bar{y}(t;\xi)$ van het systeem. Volgens één of ander criterium wordt nu getracht om door variatie van de parameters α_i het verschil tussen $\bar{y}(t;\xi)$ en $\bar{y}^*(t;\xi;\alpha_i)$ zo klein mogelijk te maken ($w(t)$ is hierin weer de weegfactor, terwijl voor de exponent p meestal twee gekozen wordt):

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} E \int_{-\infty}^{\infty} w(t) |\bar{y}(t;\xi) - \bar{y}^*(t;\xi;\alpha_i)|^p dt = 0. \quad [104]$$

Het minimaliseren van deze kostenfunctie kan analytisch of via één of andere iteratieve procedure gebeuren. In het algemeen zal door oplossing van vergelijking [104] een stelsel vergelijkingen ontstaan dat niet-lineair in de parameters is; slechts in bijzondere gevallen kan met $w(t)=1$ en $p=2$ een stelsel vergelijkingen dat wel lineair in de parameters is, verkregen worden.



Figuur 20. Parameterschatting van de modelparameters in een niet-tegengekoppeld systeem.

gen worden. Opgemerkt moet worden dat de in figuur 20 aangegeven methode in niet-teruggekoppelde systemen voldoet; varianten hierop maken parameterschatting in een gesloten keten mogelijk. Tenslotte is het van groot belang om na te gaan binnen welk geldigheidsgebied het verkregen model mag worden toegepast, of met andere woorden welke veronderstellingen als uitgangspunt bij het opstellen van het model gekozen zijn.

2. Automaten en grammatica's

Automaten zijn dynamische systemen die discreet en constant zijn. Zij zijn dynamisch omdat hun gedrag niet alleen van de laatste waarde van het ingangssignaal afhangt, maar tevens van de reeks van eerdere signaalwaarden. Zij zijn discreet omdat ze opereren op een discrete tijdas: $t=0, 1, 2, \dots$, en constant omdat zowel structuur als systeemparameters

onafhankelijk zijn van t . Tevens geldt voor automaten dat signalen gekwantiseerd zijn: zij kunnen waarden aannemen uit een eindige verzameling.

We bespreken nu eerst een aantal automaten van toenemende complexiteit (2.1). De keuze wordt bepaald door de relatie met grammatica's, welke in 2.2. behandeld wordt. Voor al deze automaten geldt dat het observeerbare systemen zijn (zie paragraaf 1.4.4.), waarbij het er niet toe doet of de beschrijving uitgaat van de toestand of van het uitgangssignaal. In feite zal de beschrijving van de toestand uitgaan, zodat in het volgende het begrip 'uitgangssignaal' niet meer gebruikt zal worden.

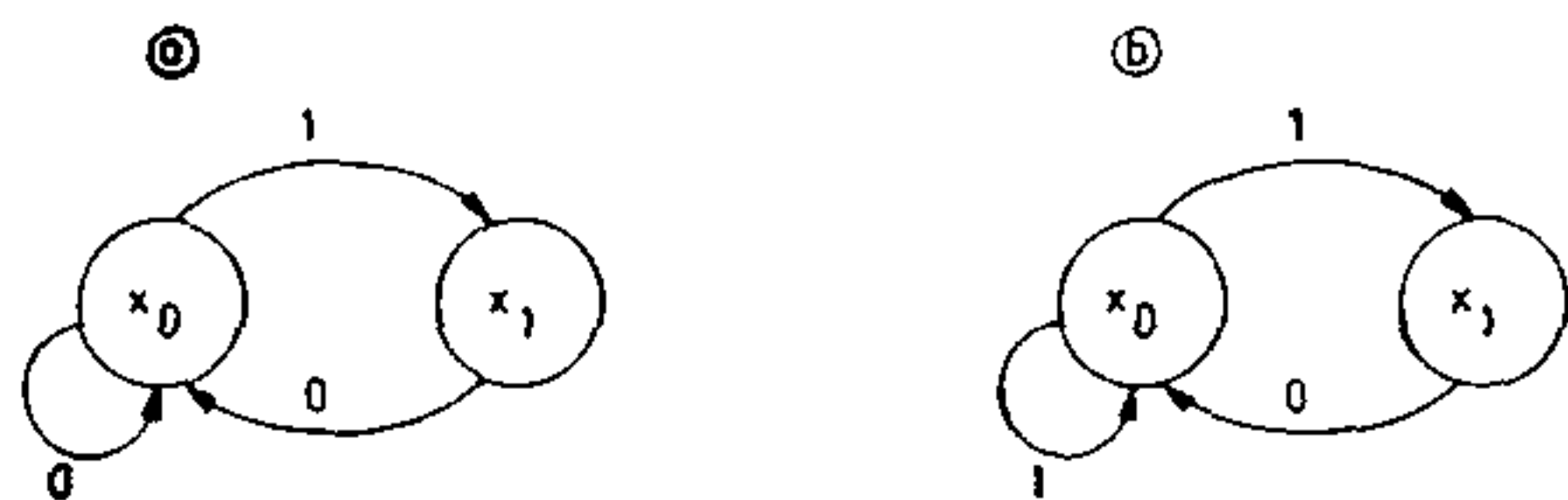
2.1. Enige automaten

2.1.1. Eindige automaten

Een eindige automaat is een systeem dat gekenmerkt wordt door de volgende vijf grootheden. Er is een eindige (niet-lege) verzameling X van toestanden waarin de automaat kan verkeren. Er is een speciale toestand x_0 , de *begintoestand*, en een verzameling F van een of meer zg. *eindtoestanden*. Verder is er een eindige (niet-lege) verzameling V van waarden die het ingangssignaal kan aannemen, ook wel het *vocabulaire* van de automaat genoemd. Tenslotte is δ de zogeheten *toestandsfunctie*. Deze geeft aan welke nieuwe toestand de automaat bereikt, wanneer het ingangssignaal een bepaalde waarde aanneemt, terwijl de automaat in een zekere toestand verkeert: $\delta(x_i, v_j) = x_k$ betekent dat de automaat in toestand x_i bij invoer van vocabulaire-element v_j overgaat in toestand x_k .

Figuur 21a laat in de vorm van een overgangsdiaagram (ook wel: signaalstroomdiagram) de werking van een eindige automaat met twee toestanden x_0 en x_1 zien, waarbij V binair is (0 of 1), terwijl de toestandsfunctie bestaat uit $\delta(x_0, 1) = x_1$, $\delta(x_0, 0) = x_0$ en $\delta(x_1, 0) = x_0$.

Om nu de werking van deze en andere automaten toe te lichten gaan we uit van het begrip 'regelbaarheid', dat werd geïntroduceerd in paragraaf 1.4.4.



Figuur 21. Overgangsdiaagram voor deterministische (a) en non-deterministische (b) eindige automaat.

Een systeem heette daar 'volledig regelbaar' wanneer er steeds een ingangssignaal bestaat waarmee het vanuit een zekere begintoestand $x(t_0)$ naar een willekeurige eindtoestand $x(t_e)$ kan worden gestuurd. In de automaten theorie gaat het niet om *volledige* regelbaarheid (d.w.z. vanuit elke willekeurige begintoestand) maar slechts om regelbaarheid vanuit één als zodanig gedefinieerde begintoestand x_0 . Deze toestand heet regelbaar wanneer er een rij van invoerelementen s (een signaal) bestaat die de automaat kan overvoeren in een eindtoestand (ϵF). Men zegt dan dat de automaat de rij s *accepteert*. Dit kan als volgt worden geschreven: $\delta(x_0, s) = x_f$, waar $s \in V^*$ (de verzameling van rijen van vocabulaire-elementen) en $x_f \in F$. In figuur 21a bijvoorbeeld, zien we dat men van x_0 naar x_1 kan gaan door invoering van 1, maar ook van 01, 001, 101, etc. De taal geaccepteerd door automaat A is de verzameling van geaccepteerde rijen: $T(A) = \{s | \delta(x_0, s) \in F\}$, oftewel de rijen waarmee de begintoestand regelbaar is. Voor de eindige automaat in figuur 21a kan dat met elke rij bestaande uit willekeurig veel 0-elementen, gevolgd door willekeurig veel sequenties 10, gevolgd door 1. Kort genoteerd: $T = \{0^*(10)^*1\}$. Twee automaten A_1 en A_2 heten *equivalent* wanneer $T(A_1) = T(A_2)$. De talen die door eindige automaten kunnen worden geaccepteerd noemt men *reguliere talen*.

Naast deterministische eindige automaten zoals in figuur 21a, zijn er ook non-deterministische. De toestandsfunctie van deze automaten geeft voor elk paar van toestand en vocabulaire-element een verzameling van mogelijke overgangen: $\delta(x_i, v_j) = \{x_h, \dots, x_k\}$. Een voorbeeld is gegeven in figuur 21b. Daar geldt $\delta(x_0, 1) = \{x_0, x_1\}$. Accepteren van de invoerrij betekent nu dat men bij elke overgang steeds een zodanige toestand kan kiezen dat er vanuit x_0 tenslotte een eindtoestand kan worden bereikt. Er is bewezen dat er voor elke non-deterministische eindige automaat een equivalente deterministische eindige automaat bestaat (het omgekeerde geldt vanzelfsprekend), zodat ook de non-deterministische eindige automaten de klasse van reguliere talen voortbrengen.

Een *probabilistische eindige automaat* is een generalisatie van de non-deterministische, waarbij voor elke overgang een waarschijnlijkheid is gedefinieerd. Het is dan een stochastisch systeem, zoals gedefinieerd in paragraaf 1.4.1. Markov-bronnen vormen hiervan een subklasse.

De invoerrijen over het vocabulaire die *niet* worden

geaccepteerd door de automaat vormen het 'complement' CT , van de taal T . Het complement van een reguliere taal is eveneens regulier, d.w.z. er bestaat voor elke eindige automaat A een andere eindige automaat A' zó, dat $CT(A)=T(A')$.

2.1.2. Stapelautomaten

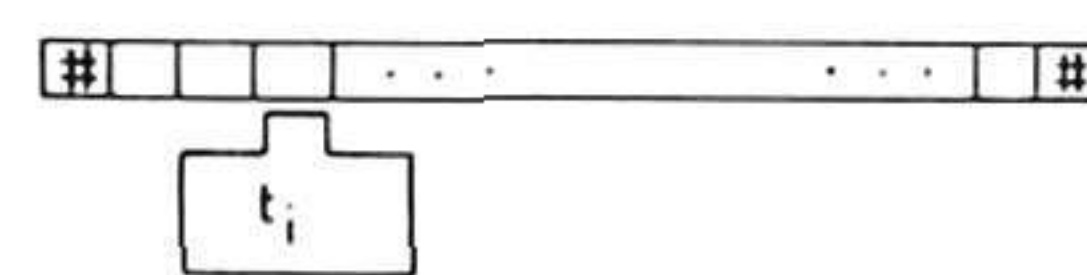
Een stapelautomaat (PDA voor 'push down automaten') is een systeem dat, in tegenstelling tot de eindige automaat een oneindige toestandsverzameling X heeft. Om die te beschrijven ontbindt men X in twee gedeelten: een eindige verzameling $T=\{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ van 'toestanden' in meer strikte zin, plus een geheugen van oneindige omvang. Het geheugen kan willekeurig lange rijen $(\chi, \Psi, \Omega, \dots)$ bevatten van zg. *geheugensymbolen* die genomen zijn uit een eindig 'geheugenvocabulaire' $\Gamma=\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$. De werking van dit geheugen stelle men zich als volgt voor: de automaat stapelt de geheugenelementen op elkaar. In de aanvang is er slechts γ_0 . Nieuwe elementen worden daar successievelijk bovenop gelegd. Ook kan steeds het bovenste element (het 'topelement') worden verwijderd. Er mogen echter geen geheugenelementen worden tussengeschoven of tussenuit getrokken.

De begintoestand x_0 van de automaat is in ontbonden vorm het paar (t_0, γ_0) , waarbij t_0 nu als 'begin-toestand' (in strikte zin) wordt aangeduid. $F \in T$ is weer de verzameling van eindtoestanden. De automaat is een systeem $(V, T, \Gamma, t_0, \gamma_0, F, \delta)$, waarin δ de verzameling is van overgangsregels. De overgangsregels geven aan wat er in een gegeven toestand bij een gegeven topelement en een gegeven invoersymbool gebeurt, d.w.z. wat de volgende toestand zal zijn en wat er in het geheugen wordt veranderd. Men schrijft $(t_i, \nu_j, \gamma_k) = (t_l, \chi)$, hetgeen betekent dat bij invoer van ν_j met γ_k als geheugentopelement de toestand van t_i in t_l verandert, en γ_k vervangen wordt door de rij (of beter: stapel) van geheugenelementen χ (eventueel de nul-rij, d.w.z. eenvoudige verwijdering van γ_k). Een rij s van invoerelementen wordt geaccepteerd door de automaat wanneer vanuit (t_0, γ_0) een eindtoestand $t_f \in F$ wordt bereikt. De taal $T(PDA)$ geaccepteerd door de PDA is de verzameling van geaccepteerde rijen: $T(PDA) = \{s \mid \delta(t_0, s, \gamma_0) = (t_f, \chi), t_f \in F, \chi \in \Gamma^*\}$. De talen, die geaccepteerd kunnen worden door PDA 's noemt men *deterministische talen*. Het complement van een deterministische taal is eveneens deterministisch. Reguliere talen vormen een strikte deelverzameling van deterministische talen.

Analoog aan de non-deterministische eindige automaat is er de non-deterministische stapelautomaat ($NPDA$). Bij elke toestand, geheugen-topelement en invoerelement kan de automaat nu uit een verzameling overgangen kiezen. Dit type automaat kan meer dan de deterministische variant. De erdoor geaccepteerde talen heten *contextvrije talen*. Deterministische talen vormen hiervan een strikte deelverzameling. De vraag of het complement van een contextvrije taal ook contextvrij is, is bewezen een onoplosbaar probleem te zijn. Wel is het complement steeds contextgevoelig (zie volgende paragraaf).

2.1.3. Lineairbegrensde automaten

De lineairbegrensde automaat (LBA) kan men zich het best voorstellen als een bandje waarlangs een mechanisme beweegt dat kan lezen en schrijven en dat in verschillende toestanden kan verkeren (zie figuur 22). Het bandje wordt gebruikt om de invoer op te schrijven, en tevens als geheugenruimte. Afgesproken wordt dat de 'werkruimte' op het bandje precies dezelfde omvang heeft als de invoer. De beschikbare geheugenruimte is dus altijd gelijk aan het aantal elementen waaruit het ingangssignaal bestaat (en dus in beginsel onbeperkt).



Figuur 22. Een lineair begrensde automaat.

De LBA die gekarakteriseerd wordt door de grootheden $V, T, \Gamma, t_0, F, \delta$, en $\#$, begint in toestand t_0 links op het bandje te lezen, d.w.z. bij het eerste invoersymbool. Naar aanleiding van wat hij daar leest verandert hij van toestand en kan hij dit eerste element vervangen door een ander. Dat kan zijn een element van V , of een extra geheugenelement (uit het eindige geheugenvocabulaire Γ). Tevens neemt hij een nieuwe positie k in, die kan zijn: één plaatsje naar rechts ($k=+1$), één plaatsje naar links ($k=-1$), of blijven staan ($k=0$). Elk paar van toestand en bandsymbool veroorzaakt dus drie veranderingen: een toestandswijziging, een wijziging van bandsymbool, en een wijziging van plaats. De overgangsregels δ geven nu aan hoe voor elk paar van toestand en gelezen bandsymbool de drie veranderingen zullen zijn. We zeggen nu dat de LBA een invoer 'accepteert' wanneer hij het rechter grenssymbool $\#$ bereikt, en

dan in een eindtoestand (ϵF) geraakt. *LBA's* zijn altijd non-deterministisch: er wordt voor elke combinatie van toestand en bandsymbool een verzameling van overgangen gespecificeerd.

De talen die door *LBA's* geaccepteerd worden heten *context-gevoelige talen*. Het is nog niet bekend of hun complementen ook contextgevoelig zijn. Contextvrije talen vormen een strikte deelverzameling van contextgevoelige.

2.1.4. Turingmachines

Een Turingmachine *TM* verschilt slechts in één opzicht van een *LBA*: de band voor lezen en schrijven is naar links en naar rechts oneindig lang. De overgangsregels zijn echter net zo als bij de *LBA*: voor elk paar van bandsymbool en toestand omschrijven zij wat het nieuwe bandsymbool ter plaatse wordt, welke nieuwe toestand bereikt wordt, en welk bandelement vervolgens zal worden gelezen ($k = -1, 0$, of $+1$). Behalve niet-deterministische *TM's* bestaan er ook deterministische. In feite is elke niet-deterministische *TM* equivalent met een deterministische.

Gezien zijn uiterst simpele constructie is het verrassend dat men op een *TM* alle bewerkingen kan uitvoeren die met een moderne digitale computer kunnen worden uitgevoerd. Het omgekeerde geldt niet eens, tenzij men ervan uitgaat dat de computerleverancier zo nodig onbeperkt veel extra geheugenruimte kan leveren. Een Turingmachine kan, naar het schijnt, elke expliciete symbooloperatie uitvoeren. In feite kan dat zelfs op een *TM* met slechts twee toestanden t_0 en t_1 . Men definieert tegenwoordig dan ook het begrip ('effectieve' of 'mechanische') 'procedure' als 'uitvoerbaar op een *TM*'. De ruimte ontbreekt om dit verder toe te lichten, zie echter Minsky (1967).

Men zegt dat *TM* een invoerrij s accepteert wanneer deze de *TM* van de begintoestand t_0 overvoert in een eindtoestand $t_f \in F$. De talen die door *TM's* worden geaccepteerd heten *opsombare talen*, zo geheten omdat zij de eigenschap hebben dat de rijen of de zinnen van zo'n taal kunnen worden 'opgesomd': d.w.z. er bestaat een procedure waarmee achtereenvolgens zinnen van de taal T (en geen andere rijen) worden opgenoemd, en wel zó dat voor elke zin in de taal T geldt dat die na een eindig aantal bewerkingen wordt vermeld. (Het opsommen zal voor een taal van oneindige omvang niettemin oneindig lang duren!) Stel er is een *TM*, met taal $T(TM)$, en een willekeurige rij s (ϵV^*). Wanneer $s \in T(TM)$ dan kan dit feit, dank

zij de opsombaarheid van T , middels een eindig aantal bewerkingen worden vastgesteld. Men zegt ook wel dat s kan worden 'herkend'. Alle eerder behandelde talen zijn ook opsombaar, maar er zijn opsombare talen die niet contextgevoelig (resp. contextvrij, regulier) zijn. Het complement $CT(TM)$ van een $T(TM)$ is niet noodzakelijk opsombaar. Dat betekent dat wanneer $s \in CT(TM)$ er geen garantie is dat s als zodanig kan worden herkend door een Turingmachine. Anders gezegd: het is niet zo dat er voor alle opsombare talen T een procedure bestaat om voor een willekeurige rij s vast te stellen of s wel of niet tot T behoort. Die talen waarvoor wél zo'n procedure bestaat noemt men 'beslisbaar'. Het zijn opsombare talen waarvan ook het complement opsombaar is.

2.2. Grammatica's en automaten

2.2.1. Grammatica's en Turingmachines

Behalve met een Turingmachine kan men een opsombare taal met een grammatica beschrijven. Een grammatica G wordt gekenmerkt door de grootheden V, H, P , en Z . V is een eindig terminaal vocabulaire (met terminale elementen $a, b, \dots$); H is een eindig hulpvocabulaire (met hulpsymbolen op variabelen $A, B, \dots$) waarin een speciaal zg. *beginsymbool* Z . P , tenslotte, is een eindige verzameling *produktieregels*. V en H hebben geen elementen gemeen: $V \cap H = \emptyset$, terwijl hun vereniging $V \cup H = \Gamma$ wel het (ongespecificeerde) *vocabulaire* van de grammatica wordt genoemd. De produktieregels in P zijn geordende paren van rijen (α, β) , meestal geschreven als $\alpha \rightarrow \beta$, waarbij de eerste rij (α) bestaat uit één of meer elementen van Γ en de tweede (β) uit 0 of meer elementen van Γ . Anders gezegd: $\alpha \in \Gamma^*$ (de rijen van positieve lengte over Γ) en $\beta \in \Gamma^*$ (de rijen over Γ , inclusief de nulrij λ). Er geldt dus $P \subseteq \Gamma^+ \times \Gamma^*$. De regel $\alpha \rightarrow \beta$ betekent dat de rij α in elke context mag worden vervangen door de rij β . Zo'n vervanging wordt aangeduid met $\Rightarrow$. Op grond van de regel $\alpha \rightarrow \beta$ mag men bijvoorbeeld de rij $\gamma\alpha\delta$ vervangen door $\gamma\beta\delta$; dit wordt dan geschreven als $\gamma\alpha\delta \Rightarrow \gamma\beta\delta$. Meer in het algemeen schrijft men $\phi \Rightarrow \psi$ (ψ is een afleiding van ϕ) wanneer er een serie van nul of meer vervangingen is die ϕ overvoert in ψ (nul vervangingen als $\phi = \psi$).

Een *zin* voortgebracht door de grammatica G is elke rij van terminale elementen die met de produktieregels van G uit Z kan worden afgeleid. Dus de rij σ is een zin voortgebracht door G indien er een afleiding $Z \Rightarrow \sigma$ bestaat en $\sigma \in V^*$.

De taal $L(G)$, voortgebracht door G is de verzameling van voortgebrachte zinnen, oftewel $L(G) = \{\sigma \mid Z \xRightarrow{*} \sigma\}$. Voorbeeld: Stel $G = (V, H, P, Z)$ met $V = \{a(\text{pen}), b(\text{akken}), c(\text{roquetten})\}$, $H = \{N(\text{aamwoord}), P(\text{redikaat}), W(\text{erkwoord}), Z(\text{in})\}$, en met produktieregels $P = \{Z \rightarrow NP, P \rightarrow WN, P \rightarrow W, N \rightarrow a, N \rightarrow c, W \rightarrow b\}$, dan kunnen we uit Z de volgende afleiding maken: $Z \Rightarrow NP, NP \Rightarrow aP, aP \Rightarrow aWN, aWN \Rightarrow abN, abN \Rightarrow abc$, of kortweg $Z \xRightarrow{*} abc$. Omdat zowel a , b als c terminale elementen zijn is de rij abc , of uitgeschreven *apen bakken croquetten* een zin in $L(G)$. De lezer kan zelf afleiden, dat de andere zinnen in $L(G)$ de volgende zijn: *apen bakken*, *croquetten bakken* en *croquetten bakken apen*.

Er kan worden bewezen dat men met de aldus gedefinieerde grammatica's precies de klasse van opsombare talen kan voortbrengen. Voor elke opsombare taal $T(TM)$ is er een grammatica G waarvoor geldt $L(G) = T(TM)$, terwijl elke taal $L(G)$ opsombaar is. Anders gezegd: voor elke Turingmachine is er een equivalente grammatica en andersom.

Chomsky heeft voorgesteld een aantal meer en meer restrictieve klassen grammatica's te onderscheiden. We volgen nu zijn indeling.

2.2.2. Contextgevoelige grammatica's en lineairbegrensde automaten

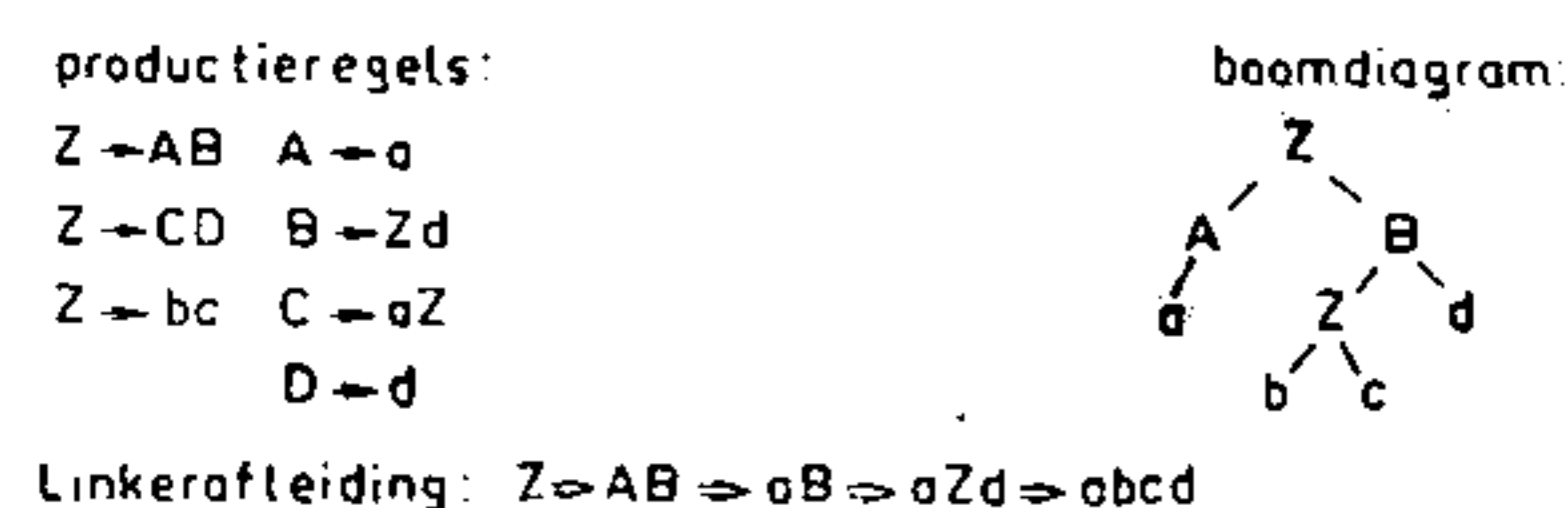
De eerste beperking houdt in dat produktieregels niet verkortend mogen zijn. Wanneer de lengte van een rij α wordt aangeduid met $|\alpha|$ (dus bijv. $|abc| = 3$), dan stelt de restrictie dat voor alle produktieregels $\alpha \rightarrow \beta$ in P moet gelden: $|\alpha| \leq |\beta|$. De grammatica's die hieraan voldoen heten *type-1* of *contextgevoelige grammatica's*. Elke taal die met een contextgevoelige grammatica kan worden voortgebracht heet een 'contextgevoelige' of 'type-1'-taal.

Eerder zagen we dat lineairbegrensde automaten precies de contextgevoelige talen accepteren. Er is dan ook bewezen dat contextgevoelige grammatica's equivalent zijn met *LBA's*. Dat is in zoverre intuïtief in te zien dat tijdens de afleiding van een zin door een contextgevoelige grammatica nooit een rij kan ontstaan die langer is dan de zin (want dan zouden er vervolgens rijverkortende regels moeten worden gebruikt). Evenzo kan de *LBA*, zoals we zagen, bij het accepteren van een zin nooit een rij van bandsymbolen produceren die langer is dan de zin: het is essentieel dezelfde beperking die op beide systemen rust.

2.2.3. Contextvrije grammatica's en stapelautomaten

De tweede beperking is weer iets restrictiever. Behalve $|\alpha| \leq |\beta|$ geldt nu ook nog dat $\alpha \in H$; α is dus een enkelvoudig hulpsymbool. Aldus ontstaat de *type-2* of *contextvrije grammatica*. De regels ervan zien er uit als $A \rightarrow \beta$; waarbij A een hulpsymbool is en β een rij in Γ^+ . Elke taal die met een contextvrije grammatica kan worden voortgebracht heet een contextvrije taal.

Een afleiding d.m.v. een contextvrije grammatica kan gemakkelijk zichtbaar worden gemaakt met een boom- of zinsdiagram. Figuur 23 geeft de produktieregels van een contextvrije grammatica G en een afleiding van de zin $abcd$. Ernaast staat het bijbehorende boomdiagram. Er is ook een andere afleiding van dezelfde zin, waarbij overigens hetzelfde boomdiagram hoort, nl. $Z \rightarrow AB \rightarrow AZd \rightarrow Abcd \rightarrow abcd$. Elk element wordt in de twee afleidingen op dezelfde manier herschreven (d.w.z. met dezelfde regel); alleen gebeurt dat wat eerder of later. De in figuur 23 ge-

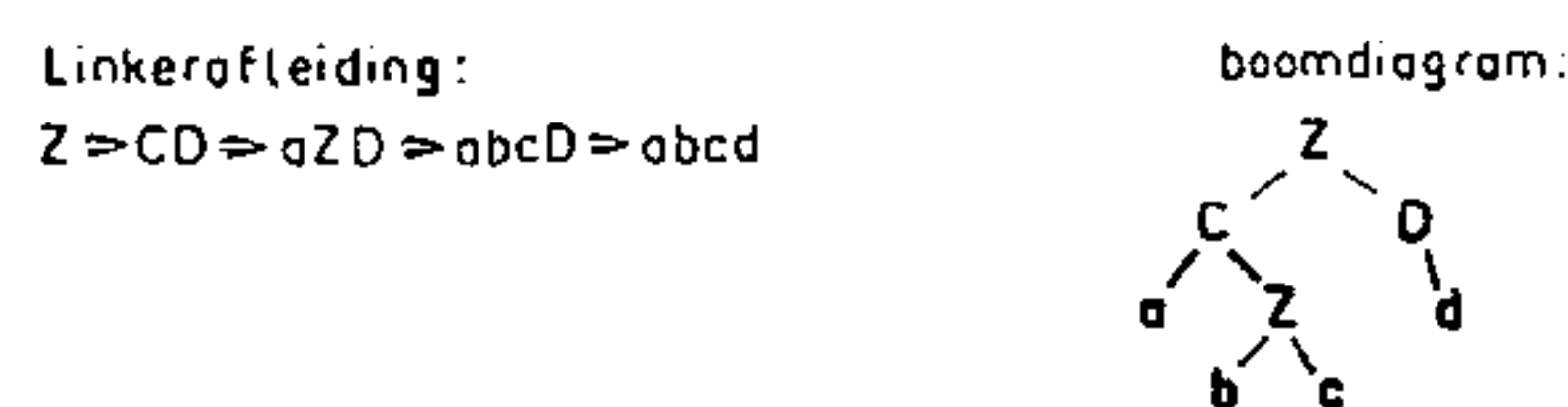


Figuur 23. Afleiding van $abcd$ met bijbehorend boomdiagram.

geven afleiding heet 'linkerafleiding' van $abcd$, omdat bij elke stap het meest linkse hulpsymbool herschreven wordt. Bij elk boomdiagram behoort precies één linkerafleiding (indien de grammatica die toelaat) en andersom.

Er is voor de zin $abcd$ nóg een linkerafleiding mogelijk met de regels in figuur 23. Hierbij hoort dan ook een ander boomdiagram. Afleiding en boomdiagram zijn gegeven figuur 24.

Wanneer een contextvrije grammatica twee of meer verschillende linkerafleidingen (zinsdiagrammen) geeft voor een zin heet de grammatica *ambigu*. Dat is dus het geval voor de onderhavige grammatica G .



Figuur 24. Alternatieve afleiding van $abcd$ met boomdiagram.

Wanneer een contextvrije grammatica niet ambigu is brengt hij een deterministische taal voort. Zo'n niet ambigu contextvrije grammatica wordt ook wel 'LR(k)-grammatica' genoemd. Een taal heet ambigu wanneer al zijn grammatica's ambigu zijn.

Er is bewezen dat contextvrije grammatica's equivalent zijn met niet-deterministische stapelautomaten. Voor elke $T(NPDA)$ is er een contextvrije grammatica CFG waarvoor geldt $L(CFG) = T(NPDA)$, en andersom. Een soortgelijke equivalentie bestaat er voor deterministische PDA 's en $LR(k)$ -grammatica's.

Er zijn ook allerlei andere middelen ontwikkeld voor de beschrijving van contextvrije talen. Voorbeelden daarvan zijn categorische grammatica's en afhankelijkheidsgrammatica's, welke hier overigens niet behandeld zullen worden.

2.2.4. Reguliere grammatica's en eindige automaten

De derde en laatste restrictie betreft de β in de contextvrije regel $A \rightarrow \beta$. Er wordt afgesproken dat β een van twee vormen mag hebben:

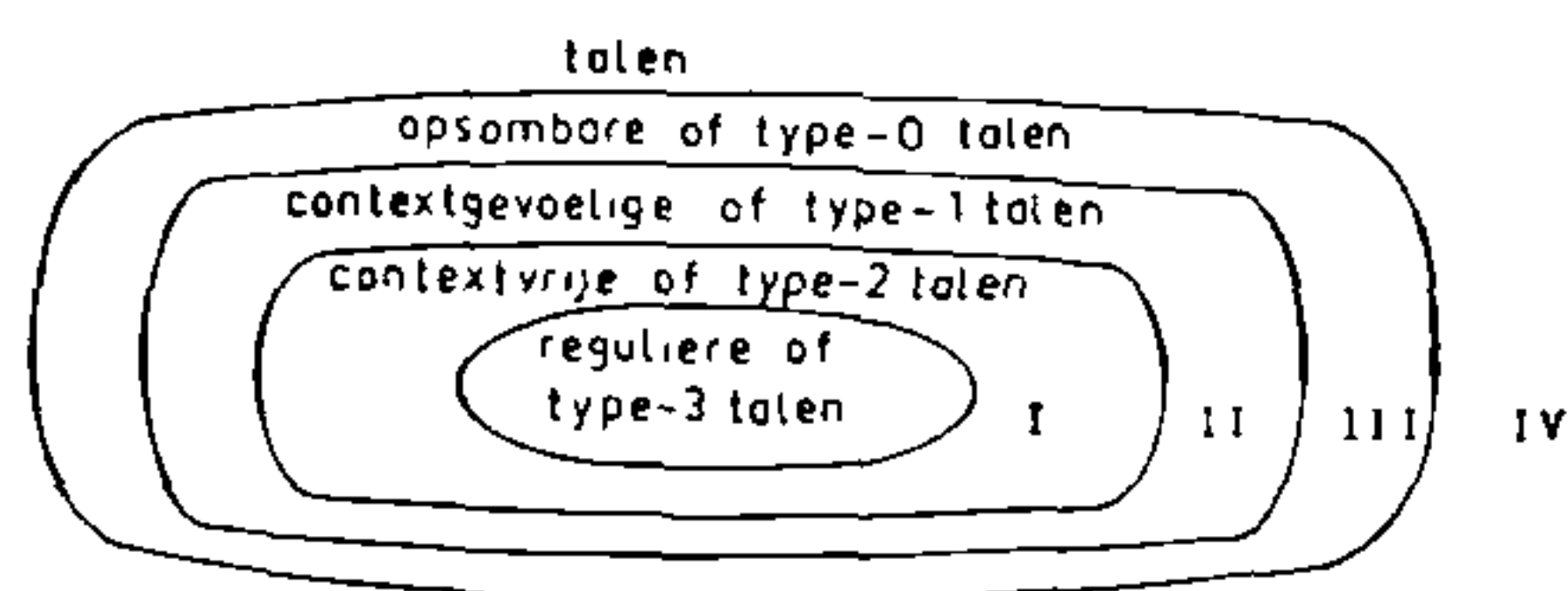
$\beta \in V$, d.w.z. β is een enkelvoudig terminaal element, of

$\beta = aB$ met $a \in V$ en $B \in H$, d.w.z. een terminaal element gevolgd door een hulpsymbool.

De zo verkregen grammatica's heten *type-3* of *reguliere grammatica's* (ook wel *finite state grammars*). De regels ervan hebben dus de vorm $A \rightarrow a$ of $A \rightarrow aB$. Er is bewezen dat een reguliere grammatica een reguliere taal voortbrengt. Reguliere grammatica's zijn equivalent met eindige automaten: zij definiëren dezelfde klasse van talen. Elke eindige taal (d.w.z. met een eindig aantal zinnen) kan met een reguliere grammatica worden voortgebracht en is dus regulier.

2.3. Chomsky's hiërarchie van talen

In figuur 25 zijn de strikte inclusierelaties weergegeven tussen de door Chomsky voorgestelde talen. In deze paragraaf wordt kort ingegaan op talen in de



Figuur 25. Chomsky's hiërarchie van talen.

gebieden aangeduid met I, II, III en IV, d.w.z. die wél contextvrij maar niet regulier zijn (I), wél contextgevoelig maar niet contextvrij (II), etc.

Ad I. Wat kenmerkt een taal die niet regulier is, d.w.z. die niet met een reguliere grammatica kan worden voortgebracht? In tegenstelling tot reguliere talen zijn deze talen *zelfinbeddend*. Dit vereist enige toelichting. Men noemt een grammatica zelfinbeddend wanneer er een variabele B is in H waarvoor geldt $B \xrightarrow{*} \alpha B \gamma$, waar $\alpha \neq \lambda$ en $\gamma \neq \lambda$. Dat betekent: de regels van de grammatica zijn zó dat er een hulpsymbool B is waaruit een rij kan worden afgeleid waarin B weer voorkomt, maar niet aan linker of rechter uiteinde. Men noemt een taal zelfinbeddend wanneer elke grammatica waarmee die taal kan worden voortgebracht zelfinbeddend is. Een voorbeeld van een zelfinbeddende taal is $\{ww^R \mid w \in V^+, V = \{a, b\}\}$, d.w.z. de taal bestaande uit symmetrische zinnen waarvan de eerste helft bestaat uit een willekeurige rij terminale elementen en de tweede helft uit de reflectie (R) daarvan, zo bijvoorbeeld de rijen aa , $abba$, $baab$, $abbbba$, $abaaba$, etc. Men noemt dit wel een 'spiegelbeeldtaal'. Een ander voorbeeld is de taal $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$, bestaande uit zinnen met n a 's gevolgd door n b 's. Chomsky's bewijs dat natuurlijke talen niet regulier zijn, en dus niet met een eindige automaat (laat staan een Markov bron) kunnen worden beschreven, was gebaseerd op het aantonen van de zelfinbeddingseigenschap voor natuurlijke talen.

Ad II. Contextgevoelige, niet-contextvrije talen worden niet door zo'n uniforme eigenschap gekenmerkt. Voor allerlei talen is echter aangetoond dat ze in deze categorie vallen. Een voorbeeld is $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$, rijen van a 's gevolgd door evenveel b 's gevolgd door evenveel c 's. Een ander voorbeeld is de taal met rijherhaling: $\{ww\}$, waar w dezelfde betekenis heeft als in het eerdere voorbeeld: elke zin bestaat dus uit een rij, gevolgd door de herhaling daarvan. Deze twee varianten zijn wel gebruikt om aan te tonen dat natuurlijke talen niet contextvrij zijn (zie Brandt Corstius, 1974; Levelt, 1974).

Ad III. In deze categorie vallen met name de niet-beslisbare type-0 talen. Dat zijn die opsombare talen waarvan het complement niet opsombaar is. Er zijn echter ook beslisbare type-0 talen die toch niet contextgevoelig zijn. Transformationele grammatica's (zie hoofdstuk 15) zijn type-0 grammatica's: zij kunnen rijverkortende regels bevatten. Er is bewezen dat Chomsky's transformationele grammatica's pre-

cies de klasse van opsombare talen voortbrengen. Andere transformationele grammatica's zijn restrictiever. Joshi's adjunctiegrammatica's, bijvoorbeeld, brengen beslisbare talen voort (zie Levelt, 1973).

Ad IV. Niet alle verzamelingen van rijen over een vocabulaire (talen) kunnen met een grammatica beschreven worden (zie voor een voorbeeld Brandt Corstius, 1974). Beweren dat een natuurlijke taal niet in die categorie valt, maar type-0 is, dan wel met een Chomskyaanse transformationele grammatica voortgebracht kan worden, betekent slechts dat men de taal beschrijfbaar acht met een grammatica.

2.4. Probabilistische grammatica's

Men kan het begrip grammatica generaliseren door aan de produktieregels ervan waarschijnlijkheden toe te kennen. Zo ontstaan zgn. probabilistische grammatica's. Met name voor reguliere en contextvrije grammatica's is dit verder uitgewerkt. Met een probabilistische grammatica wordt een waarschijnlijkheidsverdeling gedefinieerd over de zinnen van een taal. Men kan condities aangeven waaronder geldt dat die taal 'genormaliseerd' is, d.w.z. een totale waarschijnlijkheid heeft van 1. Probabilistische grammatica's vormen een machtig hulpmiddel bij de analyse van een corpus, d.w.z. een verzameling geobserveerde rijen (zinnen, gedragssequenties, etc.). Het afleiden van een grammatica uit een corpus, respectievelijk het schatten van de probabilistische parameters voor een gegeven grammatica vormt het onderwerp van de grammatische inferentietheorie.

2.5. Grammaticaliteit en regelbaarheid

Men noemt de rij s , gegeven de type- i grammatica G , 'grammaticaal', wanneer $s \in L(G)$ en 'ongrammaticaal' wanneer $s \notin L(G)$. Men kan, dank zij de eerder vermelde equivalentierelaties met automaten, ook zeggen dat de rij s grammaticaal is wanneer hij door de bijbehorende automaat wordt geaccepteerd. Dat betekent dat precies die rijen grammaticaal zijn waarmee de automaat vanuit de begintoestand kan worden geregeld. Het taalkundige begrip grammaticaliteit is derhalve nauw verwant met het systeembegrip regelbaarheid. Op dezelfde manier is het systeembegrip 'observeerbaarheid' nauw verwant met grammatische infereerbaarheid (zie Levelt, 1975).

2.6. Psychologische toepassingen en schematisch overzicht

Behalve in de taalpsychologie (zie hoofdstuk 15) vindt men de theorie van automaten en grammatica's toegepast in de (ethologische) analyse van gedragssequenties (zie bijv. Bodnar & van Baren-Kets, 1974), in patroonherkenningsonderzoek (zie het tijdschrift Pattern Recognition, Vol. 3,4 (1971) en Vol. 4,1 (1972)), in de analyse van leertheorieën (Suppes, 1969) bij denkonderzoek (Suppes, 1973), en bij geheugenonderzoek (Anderson & Bower, 1973).

In tabel 4 staan de belangrijkste grammatica's, automaten, talen, en hun complementen vermeld. Voor de kolom 'taal' geldt dat er naar boven sprake is van strikte inclusie: elke eindige taal is regulier, elke reguliere taal is deterministisch, etc., terwijl het omgekeerde niet geldt.

Tabel 4. Schema van grammatica's, talen en automaten.

grammatica	equivalente automaat	taal	complement van taal
type-0	Turing-machine	opsombaar of type-0	taal
beslisbaar of type-0		beslisbaar	type-0
type-1 of context-gevoelig	lineair-begrensde automaat	type-1 of context-gev.	?, maar zeker type-0
type-2 of context-vrij (resp. categorisch, afhankelijkheids)	niet-deterministische stapel-automaat	type-2 of context-vrij	contextvrijheid onbeslisbaar, zeker contextgevoelig
LR(k)	deterministische stapelautomaat	deterministisch of niet-ambigu	deterministisch
type-3 of regulier (finite state)	eindige automaat	regulier of finite state	regulier
		eindige taal	regulier

Voor de kolom 'grammatica' geldt deze strikte inclusie eveneens, met uitzondering van regulier en $LR(k)$: er zijn 'ambigue' reguliere grammatica's, die dus niet $LR(k)$ zijn; zij brengen echter geen ambigue talen voort.

Literatuur

De in dit hoofdstuk gegeven samenvatting over de systeemtheorie moet gezien worden als een samenvatting van het collegedictaat Signaaltheorie van Kok en Stassen. In dit dictaat wordt een vrijwel complete behandeling van de systeemtheorie gegeven. Het dictaat is gesplitst in een viertal hoofdstukken: waarschijnlijkheidsrekening en stochastische processen; ontbinding van signalen; systeembeschrijving; systeemidentificatie. In het navolgende zal een beknopt overzicht van aanbevolen boeken per onderwerp worden gegeven.

Gehele gebied van de systeemtheorie

1. Kok, J.J., Stassen, H.G., *Signaaltheorie*. T.H. Delft, Afdeling der Werktuigbouwkunde; Delft; deel I, 1971; deel II, 1972; deel III, 1975; deel IV, in bewerking.

Waarschijnlijkheidsrekening

1. Papoulis, A., *Probability, random variables and stochastic processes*. New York: McGraw-Hill, 1965.
2. Cramér, H., *Mathematical methods of statistics*. Princeton: Princeton University Press, 1945.

Schattingstheorie

1. Deutsch, R., *Estimation theory*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc., 1965.

Stochastische processen

1. Papoulis, A., *Probability, random variables and stochastic processes*. New York: McGraw-Hill, 1965.
2. Laning, J.H., Battin, R.H., *Random processes in automatic control*. New York: McGraw-Hill, 1956.

Signaalontbinding van deterministische signalen

1. Papoulis, A., *The Fourier integral and its applications*. New York: McGraw-Hill, 1962.
2. Courant, R., Hilbert, D., *Methoden der mathematischen Physik I, II*. Heidelberg: Springer-Verlag Berlin, 1968.

Transformaties

1. Papoulis, A., *The Fourier integral and its applications*. New York: McGraw-Hill, 1962.
2. Lighthill, M.J., *Introduction to Fourier analysis and generalized functions*. New York: Cambridge University Press, 1958.

3. Hsu, H.P., *Outline of Fourier analysis*. New York: Unitech Division, 1967.
 4. LePage, W.R., *Complex variables and the Laplace transform for engineers*. New York: McGraw-Hill, 1961.
 5. Doetsch, G., *Handbuch der Laplace Transformation I, II en III*. Stuttgart: Birkhauser, 1950-1956.
 6. Spiegel, M.R., *Theory and problems of Laplace transforms*. Schaum's Outline Series. New York: McGraw-Hill, 1965.
 7. Jury, E.J., *Theory and application of the z-transform method*. New York: John Wiley & Sons, 1964.
 8. DeRusso, P.M., Roy, R.J., Close, C.M., *State variables for engineers*; New York: John Wiley & Sons, 1967.
- Uitgebreide tabellen van laplace en z-transformaties worden gegeven in de volgende boeken:
9. Abramowitz, M., Stegun, J.A., *Handbook of mathematical functions*. New York: Dover Publications, 1965, p. 1019-1030.
 10. Tou, J.T., *Digital and sampled-data control systems*. New York: McGraw-Hill, 1959.

Signaalontbinding van stochastische processen

1. Papoulis, A., *Probability, random variables and stochastic processes*. New York: McGraw-Hill, 1965.
2. Davenport, W.B., Root, W.L., *An introduction to the theory of random signals and noise*. New York: McGraw-Hill, 1958.
3. Laning, J.H., Battin, R.H., *Random processes in automatic control*. New York: McGraw-Hill, 1956.
4. Blackman, R.B., Tukey, J.W., *The measurement of power spectra from the point of view of communications engineering*. New York: Dover Publ., 1958.
5. Jenkins, G.M., Watts, D.G., *Spectral analysis and its applications*. San Francisco: Holden-Day, 1969.

Lineaire systemen

1. DeRusso, P.M., Roy, R.J., Close, C.M., *State variables for engineers*. New York: Wiley, 1965.
2. Kuo, B.C., *Analysis and synthesis of sampled-data control systems*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1963.

Toestandsbeschrijving

1. Zadeh, L.A., Desoer, C.A., *Linear system theory: the state space approach*. McGraw-Hill, 1963.
2. Kwakernaak, H., Sivan, R., *Linear optimal control systems*. New York: Wiley, 1972.

Niet-lineaire systemen

1. Gibson, J.E., *Non-linear automatic control*. New York: McGraw-Hill, 1963.
2. Csáki, F., *Modern control theories: Nonlinear optimal and adaptive systems*. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1972.

Parameter en toestandsschatten

1. Eykhoff, P., *System identification, parameter and state estimation*. New York: Wiley, 1974.
2. Nahi, N.E., *Estimation theory and applications*. New York: J. Wiley & Sons, 1969.

Automaten en grammatica's

Algemeen

1. Hopcroft, J.E., Ullman, J.D., *Formal languages and their relation to automata*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1969.
2. Levelt, W.J.M., *Formele grammatica's in linguïstiek en taalpsychologie*. Vol. I: De theorie van formele talen en automaten. Deventer: Van Loghum Slaterus, 1973 (Engelse editie: Mouton, 1974).
3. Minsky, M.L., *Computation: Finite and infinite machines*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1967.

Toepassingen

1. Anderson, J., Bower, G., *Human associative memory*. Washington: Winston, 1973.
2. Bodnár, F.A., Baren-Kets, E.J. van, Sequentiële analyses van gedragsobservaties bij jonge kinderen. *Nederlands Tijdschrift voor de Psychologie*, 1974, 29, 27–66.
3. Brandt Corstius, H., *Algebraïsche taalkunde*. Utrecht: Oosthoek, 1974.
4. Levelt, W.J.M., *Formele grammatica's* (zie boven). Vol. II: Toepassingen in de taaltheorie; Vol. III: Toepassingen in de taalpsychologie.
5. Levelt, W.J.M., *Systems, skills and language learning*. In: Essen, A.J. van, en Menting, J.P. (Eds.), *The context of foreign language learning*. Assen: van Gorcum, 1975.
6. Suppes, P., Stimulus-response theory of finite automata. *Journal of mathematical Psychology*, 1969, 327–355.
7. Suppes, P., Theory of automata and its application to psychology. In: G.J. Dalenoort (Ed.), *Process models for psychology*. Den Haag: NUFFIC, 1973.

4.4. Symbolenlijst

a_k	: k^e fouriercoëfficiënt.	j	: index voor het imaginair deel.	$u(t)$	: stuur- of ingangssignaal.
a_n	: coëfficiënten differentiaalvergelijking.	J	: criteriumfunctie.	$u_k(t)$	: orthogonaalsignaal.
A_k	: amplitude.	$k(\eta_{\bar{u}})$	: versterkingsfactor.	$\underline{u}(t)$	: ingangsvector.
$A(t)$	: systeemmatrix.	$k_e(0, \sigma_{\bar{u}})$	: versterkingsfactor volgens Booton.	$U(t)$	: eenheidssprongfunctie.
b_k	: k^e fouriercoëfficiënt.	$K_{\bar{x}\bar{y}}(\tau)$	: correlatiefunctie.	$v(t)$	: stoorsignalen.
$B(t)$	: ingangsmatrix.	L	: enkelzijdige laplacetransformatie.	V	: vocabulaire van de automaat.
CT	: complement van taal T.	L^{-1}	: inverse enkelzijdige laplacetransformatie.	$w(t)$	: criteriumweegfunctie.
$C(t)$	: uitgangsmatrix.	L_{II}	: dubbelzijdige laplacetransformatie.	$x(t)$	: deterministisch signaal.
$C(sI-A)^{-1}B+D$	: overdrachtsmatrix van $\underline{U}(s)$ naar $\underline{Y}(s)$.	L_{II}^{-1}	: inverse dubbelzijdige laplacetransformatie.	$\bar{x}(t)$	: stochastisch signaal.
$C_{\bar{x}\bar{y}}(\tau)$	: covariantiefunctie.	LBA	: lineair-begrensde automaat.	$\bar{x}(t; \xi)$	: stochastisch proces.
$\hat{C}_{\bar{x}\bar{y}}(\tau)$	: schatter van de covariantiefunctie $C_{\bar{x}\bar{y}}(\tau)$.	$n(t)$	: restruis.	$\underline{x}(t)$	: random variabele.
$D(t)$	: doorverbindingsmatrix.	$NPDA$	: non-deterministische stapel-automaat.	$\mathbf{x}_0$	: toestandsvector.
e	: grondgetal natuurlijke logaritme.	P_r	: kans.	$X(\nu)$	: begintoestand.
$e^{A(t)}$	: overgangsmatrix.	PDA	: stapelautomaat.	$X_{II}(s)$	: fouriergetransformeerde van $x(t)$.
$E\{\cdot\}$	: mathematische verwachting.	P	: eindige verzameling productieregels.	$X(s)$	: dubbelzijdige laplacegetransformeerde van $x(t)$.
$f_{\bar{x}}(x)$	: verdelingsdichtheidsfunctie.	$R_{\bar{x}\bar{y}}(\tau)$	: gemiddelde productfunctie.	$y(t)$	: (enkelzijdige) laplacegetransformeerde van $x(t)$.
$f_{\bar{x}\bar{x}}(x_1, x_2; \tau)$	: gezamenlijke verdelingsdichtheidsfunctie.	s	: laplace operator of complexe frequentie.	$y(t_0)$	: uitgangssignaal.
F	: fouriertransformatie.	$(sI-A)^{-1}$	: overdrachtsmatrix van $\underline{U}(s)$ naar $\underline{x}(s)$.	Z	: beginconditie.
F^{-1}	: inverse fouriertransformatie.	$S_{\bar{x}\bar{x}}(\nu)$	: vermogensdichtheidsspectrum.	α_i	: beginsymbool.
$g\{u(t)\}$	: niet-lineair systeem.	t	: tijd.	Γ	: modelparameters.
$G(\nu)$	: overbrengingsverhouding van het lineaire model van het niet-lineaire systeem $g\{u(t)\}$.	$tU(t)$	: eenparig stijgend signaal.	$\delta(t)$	: geheugen-vocabulaire.
G	: grammatica.	T	: periodetijd.	δ	: impulsfunctie.
$h(t, t_0)$	: impulsresponsie van lineair tijdsafhankelijk systeem.	$T(A)$	: taal geaccepteerd door automaat A.	ξ	: toestandsfunctie.
$h(t)$	: impulsresponsie van lineair constant systeem.	TM	: Turing-machine.	$\eta_{\bar{u}}$	: ensemble domein.
$H(s)$	: overbrengingsverhouding.			λ	: gemiddelde waarde van $\bar{u}(t; \xi)$.
H	: eindig hulpvocabulaire.			ν	: convergentieabscis.
I	: eenheidsmatrix.			$\sigma_{\bar{u}}$	: frequentie.
				π	: variantie van $\bar{u}(t; \xi)$.
				Φ_k	: tijdsconstante of tijdsverschil.
				ω	: fase van de k^e component.
					: radiaalfrequentie.